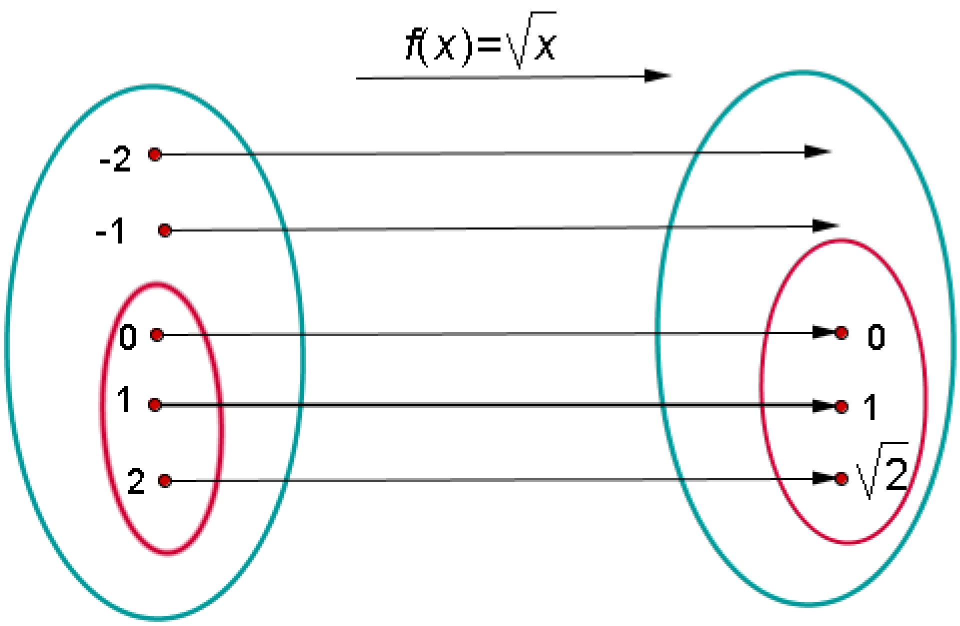
DOMINIO MÁXIMO DE UNA FUNCIÓN

El dominio máximo está formado por todos los números posibles en el conjunto de los reales, excepto aquellos que hacen que el denominador sea cero. Ilustrativamente se puede ver así:

El dominio es el conjunto de elementos que tienen imagen.

D = {x ∈ ℝ / ∃ f (x)}



Conjunto inicial Conjunto final

Dominio Conjunto imagen o recorrido

Veamos un ejemplo de cálculo de dominio máximo de una función racional

$$f(x)=\frac{2x+1}{5x-3}$$

Para calcular el dominio máximo de una función de este tipo haremos lo siguiente:

- **Tomamos el denominador y lo igualamos a cero**, (Nota: Solo el denominador es el que interesa en este tipo de funciones, lo de arriba no importa)

5x-3=0

y resolvemos la ecuación

5x-**3**=0 pasamos el 3

5x = 3 pasamos el 5 a dividir

x = 3 / 5

- : Respondemos de la siguiente forma:

Dominio máximo= R-{3/5}

Esto significa que la función:

$$f(x)=\frac{2x+1}{5x-3}$$

Existe para todos los números reales excepto el número 3/5

Ejemplos

1. Si f(x) $=\sqrt{x-9}$, entonces se requiere que x − 9 sea ≥0 y el dominio máximo es

Df = [9, ∞ [.

2. Si f(x) = $\frac{x^2+x^3}{x^2-6x+8}$

Ahora se necesita que → x^2 −6 x+8 6 sea diferente de 0.

Al resolver x^2 −6 x+8 = 0

Tenemos x = 2 o x = 4 y el dominio máximo por ende es Df = R − {2, 4}.

3. Para g(x) $=\frac{x^2-4}{\sqrt{x-1}}$

La condición necesaria es x > 1 y el dominio es Dg =]1, ∞ [.

Como se pudo ver hay distintos formas de un dominio de una función, dependiendo del tipo de función que se tenga aquí a continuación veremos muchos casos. Que inclusive involucra, temas venideros:

Dominio de la función polinómica entera

El dominio es R, cualquier número real tiene imagen.

F(x)= x^2 - 5x + 6 **D=R**

Dominio de la función racional

El dominio es R menos los valores que anulan al denominador (no puede existir un número cuyo denominador sea cero).

$$f(x)=\frac{2x-5}{x^2-5x+6}$$

Resolvemos la ecuación y que cero de la ecuación es una restricción del dominio.

$$x^2-5x+6=0 \qquad D=\mathbb{R}-\{2,3\}$$

Dominio de la función irracional de índice impar

El dominio es R.

$$f(x)=\sqrt[3]{x^2-5x+6} \qquad D=\mathbb{R}$$

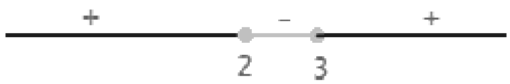
$$f(x)=\sqrt[3]{\frac{x}{x^2-5x+6}} \qquad D=\mathbb{R}-\{2,3\}$$

Dominio de la función irracional de índice par

El dominio está formado por todos los valores que hacen que el radicando sea mayor o igual que cero.

$$f(x)=\sqrt{x^2-5x+6}$$

$$x^2-5x+6\geq 0 \qquad D=(-\infty,2]\cup[3,\infty)$$



$$f(x)=\frac{\sqrt{x^2-5x+6}}{x+4}$$

$$\begin{cases} x^2-5x+6\geq 0 & (-\infty,2]\cup[3,\infty) \\ x+4\neq 0 & x\neq -4 \end{cases}$$

$$D=(-\infty,-4)\cup(-4,2]\cup[3,\infty)$$

$$f(x)=\frac{x+4}{\sqrt{x^2-5x+6}}$$

$$x^2-5x+6>0 \qquad D=(-\infty,2)\cup(3,\infty)$$

$$f(x)=\sqrt{\frac{x+4}{x^2-5x+6}}$$

$$\frac{x+4}{x^2-5x+6}\geq 0 \qquad D=[-4,2)\cup(3,\infty)$$

Dominio de la función logarítmica

El dominio está formado por todos los valores que hacen que el la función contenida dentro del logaritmo sea mayor que cero.

$$f(x)=\log(x^2-5x+6)$$

$$x^2-5x+6>0 \qquad D=(-\infty,2)\cup(3,\infty)$$

Dominio de la función exponencial

El dominio es R.

Dominio de la función seno

El dominio es R.

Dominio de la función coseno

El dominio es R.

Dominio de la función tangente

$$D = \mathbb{R} - \left\{(2k+1) \cdot \frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}\right\}$$

$$D = \mathbb{R} - \left\{\ldots, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \ldots\right\}$$

Dominio de la función cotangente

$$D = \mathbb{R} - \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$$

$$D = \mathbb{R} - \{\ldots, -\pi, 0, \pi, \ldots\}$$

Dominio de la función secante

$$D = \mathbb{R} - \left\{(2k+1) \cdot \frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}\right\}$$

$$D = \mathbb{R} - \left\{\ldots, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \ldots\right\}$$

Dominio de la función cosecante

$$D = \mathbb{R} - \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$$

$$D = \mathbb{R} - \{\ldots, -\pi, 0, \pi, \ldots\}$$

Dominio de operaciones con funciones

Si realizamos operaciones con funciones, el dominio de la función resultante será:

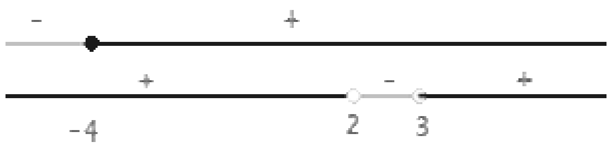
$$D(f+g) = D(f-g) = D(f \cdot g) = D(f) \cap D(g)$$

$$D\left(\frac{f}{g}\right) = D(f) \cap D(g) - \{x \in \mathbb{R} \,/\, g(x) = 0\}$$

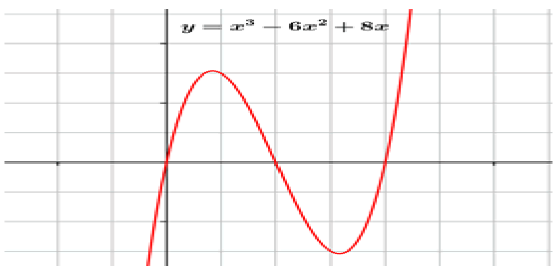
$$f(x) = \frac{\sqrt{x+4}}{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}$$

$$\begin{cases} x + 4 \geq 0 & [-4, \infty) \\ x^2 - 5x + 6 > 0 & (-\infty, 2) \cup (3, \infty) \end{cases}$$

$$D = [-4, 2) \cup (3, \infty)$$



Más ejemplos:



$y = x^3 - 6x^2 + 8x$

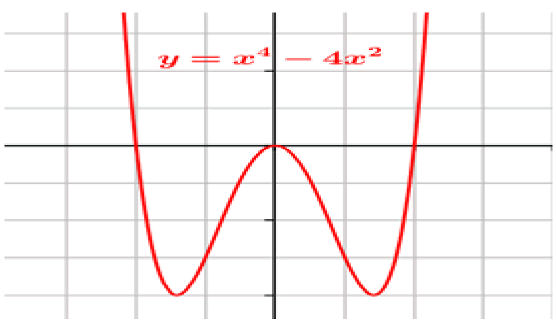
Dom f(x) = $\mathbb{R}$, podemos leer valores de la función para cualquier valor de x.

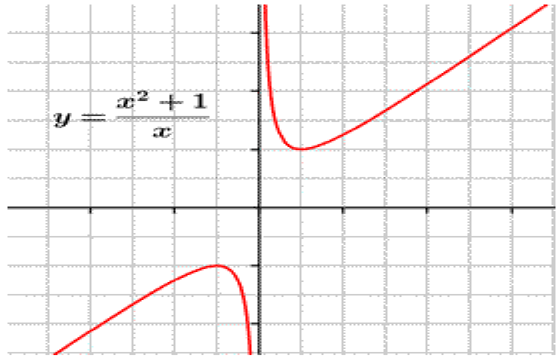
Recorrido = $\mathbb{R}$, seguimos el eje OY de abajo hacia arriba y podemos leer valores siempre.

$y = x^4 - 4x^2$

Dom f(x) = $\mathbb{R}$

Recorrido: $[-4, +\infty)$ sólo podemos leer función desde y = - 4 hacia arriba.





$\mathbf{f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}}$

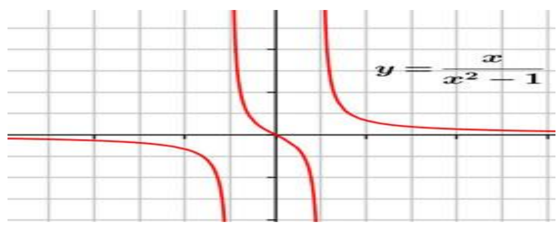
Dominio: $x = 0 \quad \Rightarrow \quad$ Dom $f(x) = \mathbb{R} - \{0\}$. Observamos que podemos leer función en el eje OX para cualquier valor de x menos en x = 0

Recorrido: Leemos en el eje OY desde $(-\infty, -2] \cup [2, \infty)$

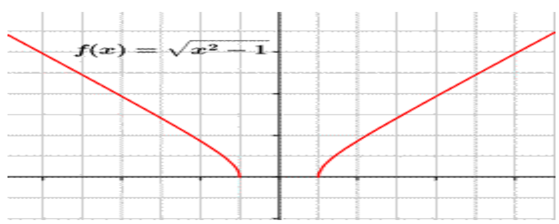
$\mathbf{f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}}$

Dominio: $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \quad \Rightarrow$ Dom $f(x) = \mathbb{R} - \{1, -1\}$. Podemos leer función para cualquier valor de x excepto en $x = \pm 1$.

Recorrido: todo $\mathbb{R}$



Otro ejemplo



$\mathbf{f(x) = \sqrt{x^2 - 1}}$

Dominio: $x^2 - 1 \geq 0$ resolvemos la inecuación. $(x+1)(x-1) \geq 0 \quad \Rightarrow$ Dom $f(x) = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

Las soluciones son las zonas de la gráfica donde se cumple la inecuación,

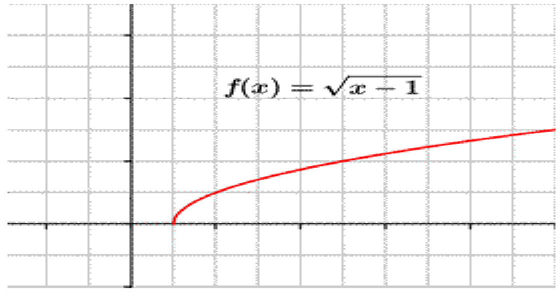
podemos leer desde $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

Recorrido: podemos leer desde y = 0 . Recorrido o imagen = $\mathbb{R}^+$ también como $[0, \infty)$

$\mathbf{f(x) = \sqrt{x - 1}}$

Dominio: $x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1 \quad \Rightarrow$ Dom $f(x) = [1, \infty)$. Podemos leer desde 1 hasta infinito.

Recorrido: $(0, \infty)$



Calcular los dominios de las siguientes funciones:

1. $f(x) = \dfrac{x}{x-1} \quad \Rightarrow x - 1 = 0 \quad \Rightarrow x = 1 \quad \Rightarrow \quad$ Dominio f(x): $\mathbb{R} - \{1\}$

2. $f(x) = \dfrac{2}{x^2 + 2x + 1} \Rightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \quad \Rightarrow x = -1 \quad \Rightarrow$ Dominio f(x): $\mathbb{R} - \{-1\}$

3. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1} \quad \Rightarrow x^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow x^2 = -1 \quad \Rightarrow x = \pm\sqrt{-1}$ sin solución. $\Rightarrow$ Dominio f(x): $\mathbb{R}$

4. $f(x) = \sqrt{x+1} \quad \Rightarrow x + 1 \geq 0 \quad \Rightarrow x \geq -1 \quad \Rightarrow \quad$ Dominio f(x): $[-1, \infty)$

5. $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 8} \quad \Rightarrow x^2 - 6x + 8 \geq 0 \quad \Rightarrow (x-2)(x-4) \geq 0 \quad \Rightarrow$ Dominio f(x): $(-\infty, 2] \cup [4, \infty)$

6. $f(x) = \log\ x^2 - 6x + 8 \Rightarrow x^2 - 6x + 8 > 0 \quad \Rightarrow (x-2)(x-4) > 0 \quad \Rightarrow$ Dominio f(x): $(-\infty, 2) \cup (4, \infty)$

   *** El 2 y el 4 no los incluimos, el logaritmo daría 0 y no existe.

7. $f(x) = \log(x+1) \quad \Rightarrow x + 1 > 0 \quad \Rightarrow \quad x > -1 \quad \Rightarrow$ Dominio f(x) = $(-1, \infty)$

   *** El -1 no lo incluimos, el logaritmo daría 0 y no existe.

8. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}} \quad \Rightarrow \begin{cases} \text{Denominador irracional, el dominio sería desde } [1, \infty) \\ \text{Como también es racional para } x = 1 \text{ no existe } \Rightarrow \textbf{Dom f(x)} = (1, \infty) \end{cases}$

9. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 4}} \quad \Rightarrow \begin{cases} \text{Denominador irracional, el dominio sería } (-\infty, -2] \cup [2, \infty) \\ \text{Para } x = \pm 2 \text{ la función } \nexists \quad \Rightarrow \textbf{Dom f(x)} = (-\infty, -2) \cup (2, \infty) \end{cases}$

10. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+3}{x-2}} \quad \Rightarrow \dfrac{x+3}{x-2} \geq 0$

    Resolvemos la inecuación $\Rightarrow$ tiene sentido para: $(-\infty, -3] \cup [2, \infty)$

    Como es racional para $x = 2 \nexists \quad \Rightarrow$ **Dom f(x)** $= (-\infty, -3] \cup (2, \infty)$