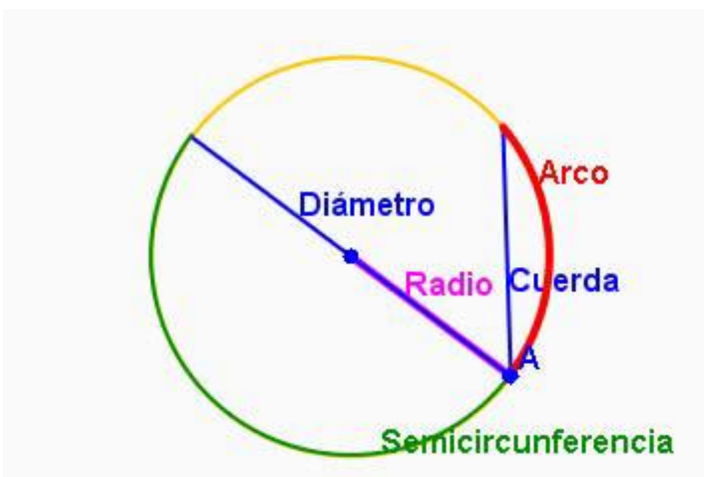
El círculo y la circunferencia

La circunferencia es una línea plana y cerrada en la que todos los puntos están a igual distancia de un punto **O** dado.

Elementos de la circunferencia.

En una circunferencia podemos distinguir los siguientes elementos:

- Centro: es el punto situado en su interior que se encuentra a la misma distancia de cualquier punto de la circunferencia.
- Radio: es el segmento que une cualquier punto de la circunferencia con el centro.
- Cuerda: es el segmento que une dos puntos cualesquiera de la circunferencia.
- Diámetro: es la cuerda que pasa por el centro de la circunferencia.
- Arco: es el segmento de circunferencia comprendido entre dos de sus puntos.
- Semicircunferencia: es el arco que abarca la mitad de la circunferencia.



Note que el diámetro tiene el doble de longitud que el radio. Por lo que esto se puede escribir como:

$$D= r/2$$

Recta y circunferencia.

Igual que hemos hecho con puntos, podemos estudiar la posición relativa de una recta y una circunferencia.

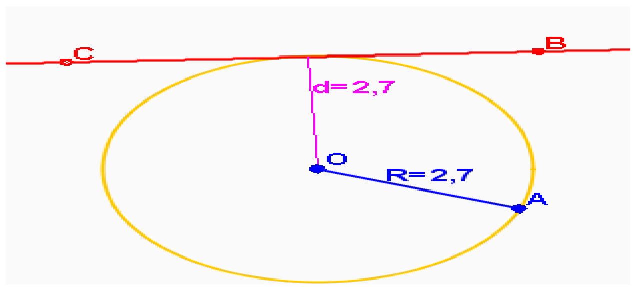
Se pueden dar los siguientes casos.

Si la recta no tiene ningún punto en común con la circunferencia, decimos que son exteriores.

Si tienen un punto en común, decimos que la recta y la circunferencia son tangentes. En este caso la recta es perpendicular al radio.

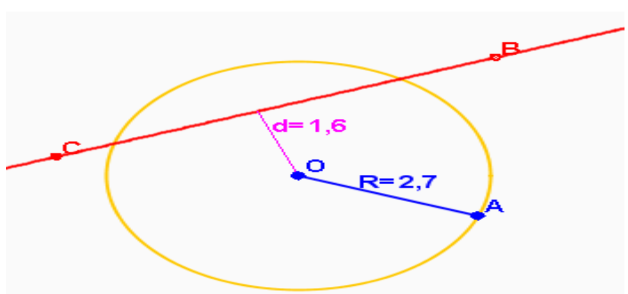
Si tienen dos puntos comunes, entonces decimos que la recta y la circunferencia son secantes.

Llamamos tangente a la recta que tiene un sólo punto en común con la circunferencia. Es decir que solo toca la circunferencia en un punto.



Recta **tangente** a la circunferencia

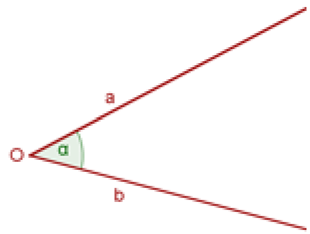
También hay que mencionar a la recta secante, que se define como aquella recta que toca a la circunferencia en dos puntos. Veamos



Recta **secante** a la circunferencia

Ángulos de la Circunferencia

Un ángulo es la región del plano comprendida entre dos semirrectas con origen común. A las semirrectas se las llama lados y al origen común vértice.



El **ángulo** es **positivo** si se desplaza en **sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj** y **negativo en caso contrario**.

Para **medir ángulos** se utilizan las siguientes unidades:

1Grado sexagesimal (°)

Si se divide la circunferencia en 360 partes iguales, el ángulo central correspondiente a cada una de sus partes es un ángulo de un grado (1°) sexagesimal.

Un **grado** tiene **60 minutos** (**'**) y un **minuto** tiene **60 segundos** (**''**).

2 Radián (rad)

Es la medida de un **ángulo** cuyo **arco mide un radio**.

2π rad = 360°

π rad = 180°

30º $\longrightarrow$ rad

$$\frac{\pi}{\alpha} = \frac{180°}{30°} \qquad \alpha = \frac{30°\pi}{180°} = \frac{\pi}{6}\,rad$$

π/3 rad $\longrightarrow$ º

$$\frac{\pi}{\frac{\pi}{3}} = \frac{180°}{\alpha} \qquad \alpha = \frac{180° \cdot \frac{\pi}{3}}{\pi} = \frac{180°}{3} = 60°$$

Para seguir practicando vea lo siguiente

Conversión entre grados y radianes:

La conversión de grados a radianes y de radianes a grados está basada en que:

$$180 \ grados = \pi \ \ radianes$$

Para cambiar **radianes a grados** y **grados a radianes** usamos las siguientes fórmulas:

Radianes a grados	Grados a radianes
$\frac{180^0}{\pi}\theta$	$\frac{\pi}{180^0}\theta$

Ejemplos:

1) Cambia de radianes a grado:

$a)\ 5\ radianes$

$b)\ \frac{7}{6}\pi$

$c)\ \frac{-5}{12}\pi$

2) Cambia de grados a radianes:

a) 75^0

b) 150^0

c) -15^0

Expresar en radianes los siguientes ángulos:

1) 316°

2) 10°

3) 127º

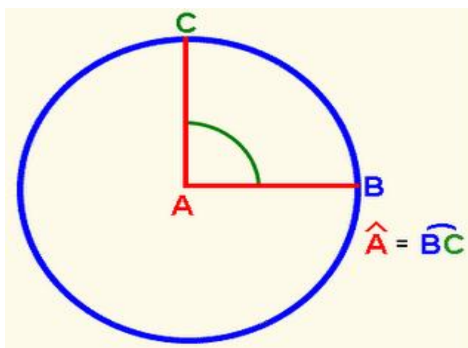
Ángulo central

Se llama ángulo central a cualquier ángulo que tenga su vértice en el centro de la circunferencia.

Todo ángulo central corta a la circunferencia en dos puntos que determinan un arco comprendido.

Así, un ángulo de 360º comprende a la circunferencia completa, un ángulo de 180º divide a la circunferencia en dos arcos iguales y un ángulo recto comprende un arco que es la mitad de una semicircunferencia.

De esta manera es posible identificar cada ángulo central con su arco de circunferencia correspondiente.



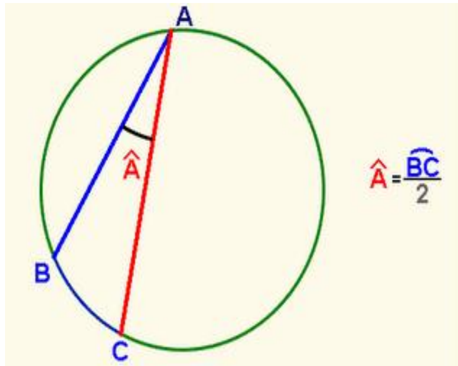
Ángulo inscrito.

Se llama **ángulo inscrito** al ángulo que tiene su vértice P en la circunferencia, de forma que sus lados son **secantes** con la circunferencia.

Si A y B son los puntos en que los lados del ángulo inscrito APB cortan a la circunferencia y consideramos el ángulo central AOB que queda determinado por los puntos A y B, resulta entonces que este ángulo central AOB tiene amplitud doble que el ángulo inscrito APB.

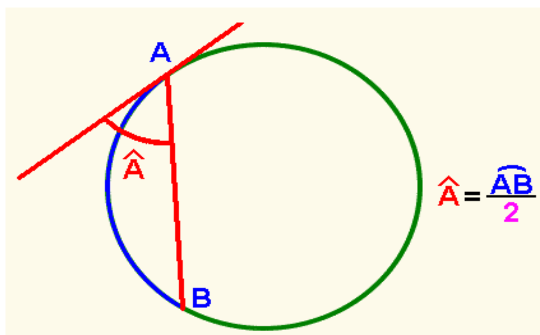
Sabemos así que la amplitud de cualquier ángulo **inscrito** es la **mitad** de la amplitud del ángulo **central** correspondiente.

La amplitud de cualquier ángulo inscrito es la **mitad** de la amplitud del ángulo central correspondiente.



Angulo semi-inscrito

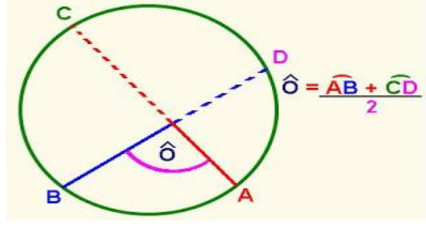
están formados por una secante una tangente, o una cuerda y una tangente, si los vemos gráficamente, en los semi-inscritos se aprecia que una parte del ángulo queda fuera de la circunferencia, por ello el prefijo semi.



Ambos tipos de ángulos tienen la característica de medir la mitad del arco comprendido por los lados del ángulo.

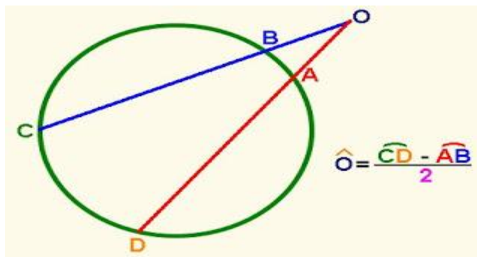
Ángulo interior

Son aquellos ángulos que tienen su vértice, como su nombre lo dice, en el interior de la circunferencia sin que coincida con el centro, pueden estar formados por dos cuerdas, por una cuerda una secante o por dos secantes. La medida de un ángulo interior la calculamos sumando los dos arcos que forman los lados del ángulo interior y dividiendo el resultado de esta suma entre dos.



Ángulos exteriores

Estos ángulos tienen la característica de que su vértice está fuera del círculo, éstos pueden estar formados por dos secantes (como el de la ilustración de abajo), por dos tangentes o por una secante y una tangente. Si observas, los lados del ángulo exterior delimitan dos arcos, un arco grande (en la ilustración CD es el arco mayor) y un arco más pequeño (BA en nuestro ejemplo ilustrado). Para calcular la medida de un ángulo exterior, solo debemos restar a la medida del arco mayor la medida del arco menor y este resultado dividirlo entre dos.



Círculo y figuras circulares

Es posible determinar en un círculo varias figuras geométricas de interés.

Se llama sector circular a la región del círculo determinada por dos radios.

Se llama segmento circular a la región del círculo determinada por una cuerda. La región delimitada por dos cuerdas paralelas se llama zona circular.

La región determinada por dos circunferencias concéntricas (circunferencias que están una dentro de otra) se denomina corona circular. Si cortamos una corona circular por dos radios, obtenemos una figura llamada trapecio circular.

Los radios, cuerdas y circunferencias concéntricas determinan diversas figuras circulares

Longitud de la circunferencia

En cualquier circunferencia, al dividir su longitud entre el diámetro, se obtiene una cantidad fija algo mayor que tres.

Esa división da siempre 3,1415926 ...

Este número se designa por la letra griega π (pi) y tiene infinitas cifras decimales no periódicas.

Si L es la longitud de la circunferencia y D el diámetro, tenemos $L = \pi \cdot D$. Como el diámetro es doble del radio R, la longitud de la circunferencia será:

$$L=2\cdot\pi\cdot R$$

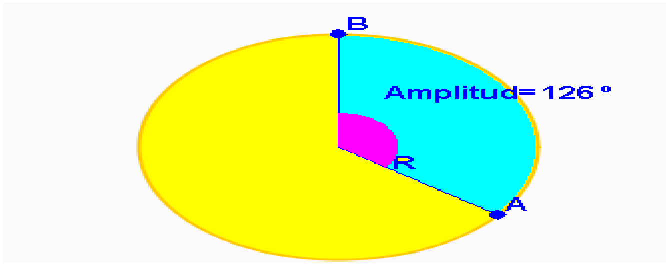
Área de un círculo

$$\text{Área} = \pi \cdot R^2$$

Área del sector circular

El área de un sector circular de amplitud n, se calcula utilizando la proporcionalidad directa, con lo que resulta la fórmula:

$$A_{sector} = \frac{n\pi R^2}{360}$$

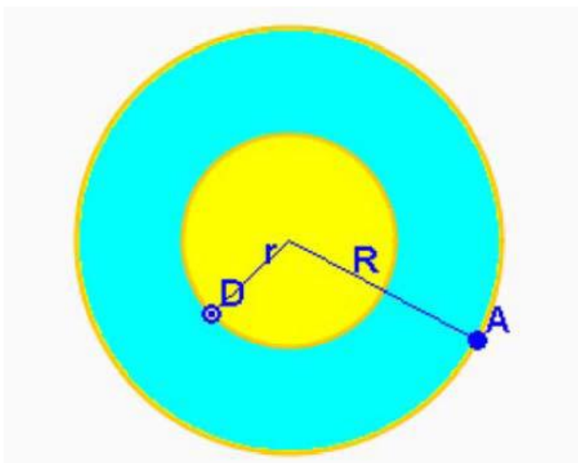


Área de la corona circular

Para calcular el área de la corona circular se restan las áreas de las circunferencias mayor y menor:

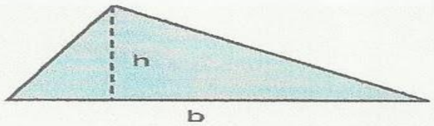
$$A_{corona\ circular} = \pi(R^2 - r^2)$$

Donde R y r son los radios mayor y menor de la corona.



Áreas de figuras planas regulares

· TRIÁNGULO

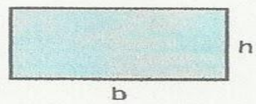


$$A = \frac{b \times h}{2}$$

· CUADRADO

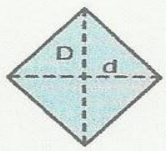
$$A = l \times l = l^2$$

· RECTÁNGULO



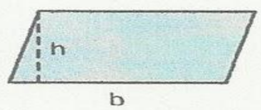
$$A = b \times h$$

· ROMBO



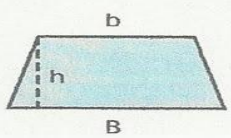
$$A = \frac{D \times d}{2}$$

· ROMBOIDE



$$A = b \times h$$

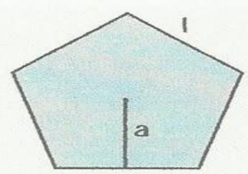
· TRAPECIO



$$A = \frac{B \times b}{2} \cdot h$$

· POLÍGONOS REGULARES

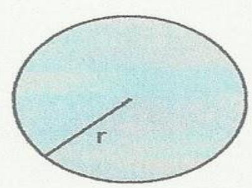
El área de un polígono regular cualquiera es igual al semiproducto del perímetro por la apotema.



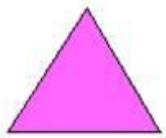
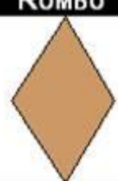
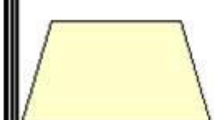
$$A = \frac{P \cdot a}{2}$$

· CÍRCULO

El área del círculo es igual al producto del número π por el radio al cuadrado.



$$A = \pi \cdot r^2$$

FORMA	ELEMENTOS	FÓRMULA PERÍMETRO	FÓRMULA ÁREA
TRIÁNGULO 	b: Base h: Altura l: Lado1 m: Lado2 n: Lado3	$P = l + m + n$	$A = \frac{b \times h}{2}$
CUADRADO 	a: Lado	$P = 4a$	$A = a^2$
RECTÁNGULO 	b: Base h: Altura	$P = 2b + 2h$	$A = b \times h$
ROMBO 	a: Lado d: Diagonal menor D: Diagonal mayor	$P = 4a$	$A = \frac{D \times d}{2}$
ROMBOIDE 	b: Base h: Altura	$P = 2b + 2h$	$A = b \times h$
TRAPECIO 	l: Lado1 m: Lado2 n: Lado3 o: Lado4 b: Base menor B: Base mayor h: Altura	$P = l + m + n + o$	$A = \frac{h\,(B + b)}{2}$

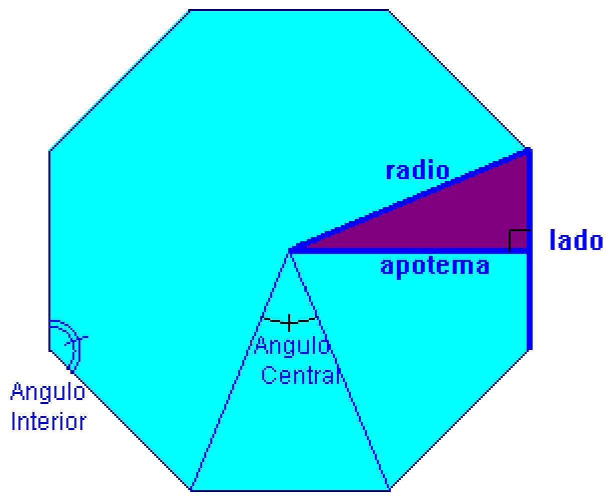
Aquí se debe introducir el termino de polígonos regulares el cual será de uso más adelante

Polígono es la superficie plana encerrada dentro de un contorno formado por segmentos rectos unidos en sus extremos. Cada uno de los segmentos se denomina lado. El punto de unión de cada par de segmentos se denomina ángulo.

Para nuestro caso específico el polígono regular es aquel en el que se tienen lados y ángulos iguales.

El número de lados, (y por tanto de ángulos) ha de ser mayor o igual a tres.

Partes de un polígono regular



El perímetro es igual a la suma de los lados.

Por ejemplo si fuera un pentágono de 5 cm de lado su perímetro sería:

P=5x5=25cm

Y el área se determina por la siguiente fórmula:

$$A = \frac{Pxa}{2}$$

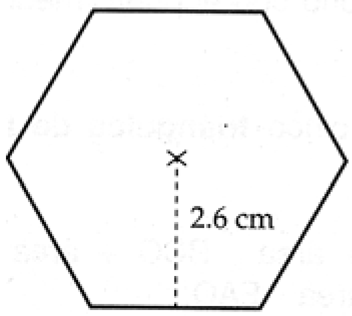
Donde "P" es el perímetro, y "a" el valor de la apotema

Algunas propiedades importantes

La suma de los ángulos interiores de un polígono de n lados es 180(n-2).

Número de **diagonales** (segmentos que unen vértices no consecutivos) de un polígono es $\mathbf{D_n = n\,(n\text{-}3)/2}$.

Ejemplo del área de un polígono regular; el hexágono



$$A = \frac{P \cdot a}{2}$$

$$A = \frac{(18\text{ cm})\,(2.6\text{ cm})}{2}$$

$$A = \frac{46.8\text{ cm}^2}{2}$$

$$A = 23.4\text{ cm}^2$$

Si n es el número de lados del polígono,

Ángulo interno

$$\frac{(n-2) \times 180^\circ}{n}$$

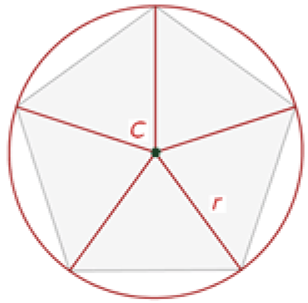
Y para el ángulo externo, hay que restar esa cantidad de 180°, es decir

$$180^\circ - \frac{(n-2) \times 180^\circ}{n}$$

Polígonos inscritos

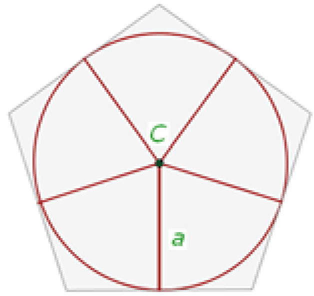
Un polígono está inscrito en una circunferencia si todos sus vértices están contenidos en ella.

Todo polígono inscrito es regular. El centro de un polígono inscrito es el centro de la circunferencia circunscrita en él. El radio del polígono inscrito es el radio de la circunferencia circunscrita en él.

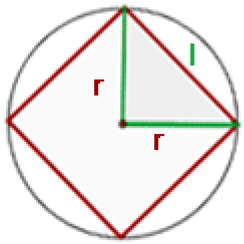


Polígonos circunscritos

Un polígono está circunscrito en una circunferencia, si todos los sus lados son tangentes a la circunferencia. El polígono circunscrito toca en el punto medio de cada lado a la circunferencia inscrita. El centro de la circunferencia inscrita equidista de todos los lados del polígono circunscrito. La apotema del polígono circunscrito es el radio de la circunferencia inscrita.

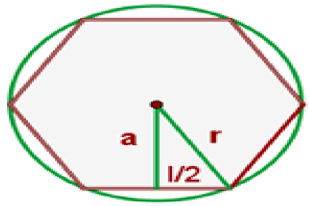


Lado de un cuadrado inscrito



$$l = \sqrt{r^2 + r^2}$$

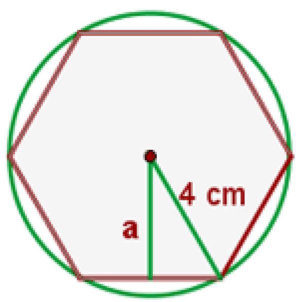
Apotema del hexágono inscrito



l=r

$$a = \sqrt{l^2 - (\frac{l}{2})^2}$$

Como ejemplo calcule la apotema de un hexágono inscrito en una circunferencia de 4 cm de radio.



l=r=4

$$a = \sqrt{4^2 - 2^2} = 3.46 \text{ cm}$$

Sólido Geométrico

Es aquella porción del espacio separado del espacio inmediato por un conjunto de puntos que conforman la superficie del sólido. Un sólido de acuerdo a su superficie puede ser: poliedro (pirámide, prisma, etc.) o cuerpo redondo (esfera, cilindro, etc.).

Poliedro: Es aquel sólido geométrico cuya superficie está formada por cuatro o más regiones poligonales planas a las cuales se les denomina caras del poliedro.

Al lado común de dos caras se le denomina arista y al punto de concurrencia de las aristas, vértice del poliedro.

DIAGONAL DEL POLIEDRO: Es el segmento cuyos extremos son dos vértices ubicados en caras distintas.

Los poliedros se nombran de acuerdo a su número de caras y pueden ser:

- Tetraedro .... (4 caras)
- Pentaedro .... (5 caras)
- Hexaedro .... (6 caras)

Tipos de Poliedros:

- Poliedros convexos
- Poliedro no convexo

POLIEDROS REGULARES:

Son aquellos poliedros cuyas caras son polígonos regulares: Solamente existen 5 poliedros regulares y son:

1. Tetraedro regular: Poliedro formado por cuatro triángulos equiláteros.

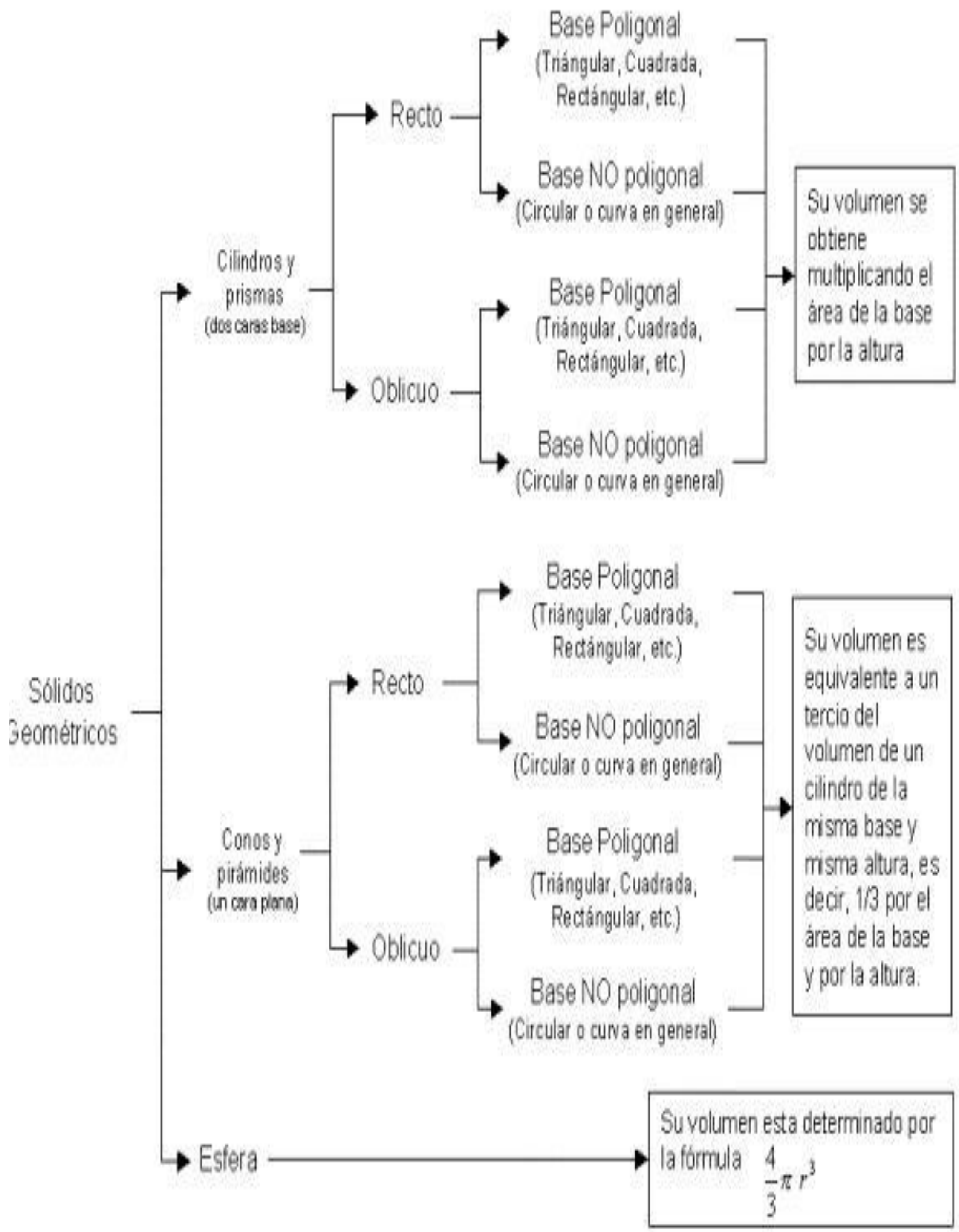
2. Hexaedro regular o cubo: Poliedro formado por seis cuadrados.

3. Octaedro regular: Poliedro formado por ocho triángulos equiláteros.

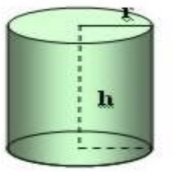
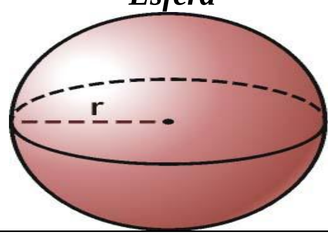
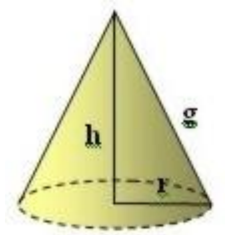
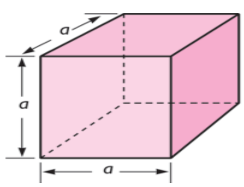
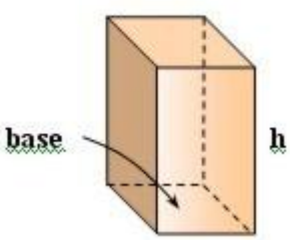
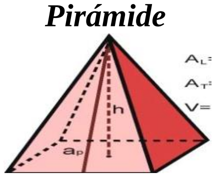
4. Dodecaedro regular: Poliedro formado por doce pentágonos regulares.

5. Icosaedro regular: Poliedro formado por veinte triángulos equiláteros.

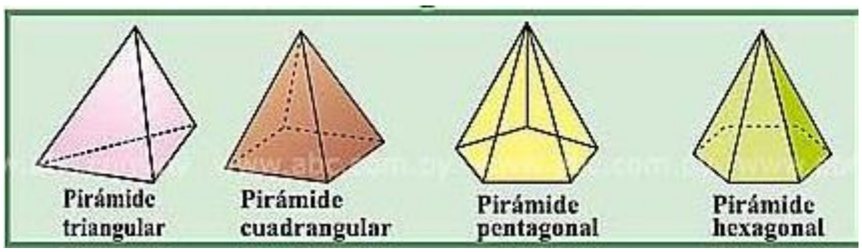
A manera de resumen podemos ver el siguiente esquema



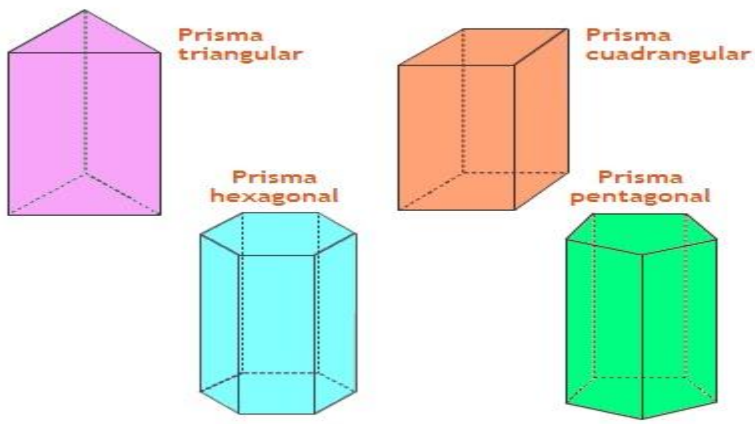
Ahora veamos, un poco de los casos más típicos y de como calcular su área y su volumen.

Cuerpo Geométrico	Área	Volumen
Cilindro  	$A_{base} = \pi r^2$ $A_{lateral} = 2\pi r h$ $A_{total} = 2\pi r(h + r)$	$V = \pi r^2 \cdot h$
Esfera  	$A_{total} = 4\pi r^2$	$V = \frac{4}{3}\pi r^3$
Cono  	$A_{total} = \pi r^2 + \pi r g$ ***Es decir la suma del área de la base, más la suma del área lateral y g es la generatriz del cono***	$V = \frac{\pi r^2 h}{3}$
Cubo  	**A = 6 a^2** ***Debido a que cada una de sus 6 caras, es un cuadrado***	**V = a^3**
Prisma  	$A_L = p \cdot h$ $A_T = p \cdot h + 2A_B$ **Donde "p" es el perímetro y "h" la altura.**	$V = A_B h$
Pirámide  	$A_L = \frac{p a_p}{2}$ $A_T = \frac{p \cdot a_p + A_B}{2}$	$V = \frac{A_{Base} \cdot h}{3}$

Las pirámides pueden tener diferentes BASES, por ejemplo veamos las siguientes ilustraciones



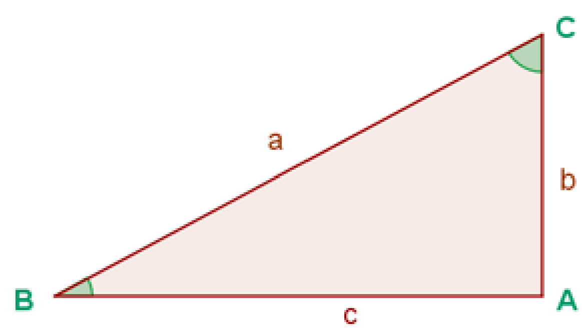
Los prismas tienen diferentes bases también, distingamos:



FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Empezamos a partir de las razones trigonométricas, que se definen a partir de un triangulo rectángulo, es decir un triangulo que tiene un ángulo de 90 grados. Esto con el objetivo principal; de definir el seno, el coseno, y la tangente. Tengamos presente que

Ahora definamos las identidades



Seno: el seno **del ángulo B es la** razón entre el cateto opuesto al ángulo y la hipotenusa**.**

Se denota por **sen B**.

$$\text{sen B}= \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{a}$$

Coseno: el **coseno** del ángulo B es la **razón entre el cateto contiguo al ángulo y la hipotenusa**.

Se denota por **cos B**.

$$\cos B = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{a}$$

Tangente: la **tangente** del ángulo B es la **razón entre el cateto opuesto al ángulo y el cateto contiguo al ángulo**.

Se denota por **tan B**.

$$\text{tg } B = \frac{\text{sen } B}{\cos B} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}} = \frac{b}{c}$$

Cosecante: la **cosecante** del ángulo B es la **razón inversa del seno de B**.

Se denota por **csc B**.

$$\text{cosec } B = \frac{1}{\text{sen } B} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{a}{b}$$

Secante: la **secante** del ángulo B es la **razón inversa del coseno de B**.

Se denota por **sec B**.

$$\sec B = \frac{1}{\cos B} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto contiguo}} = \frac{a}{c}$$

Cotangente: la **cotangente** del ángulo B es la **razón inversa de la tangente de B**.

Se denota por **cot B**.

$$\text{cotg } B = \frac{1}{\text{tg } B} = \frac{\cos B}{\text{sen } B} = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{c}{b}$$

Ahora que sabemos estas identidades podemos ver los casos de como se resuelve el problema de encontrar el valor de un lado, un ángulo…

La resolución de esto, se realiza mediante el ya conocido teorema de Pitágoras, suma de ángulos internos que es igual a 180 grados y razones trigonométricas.

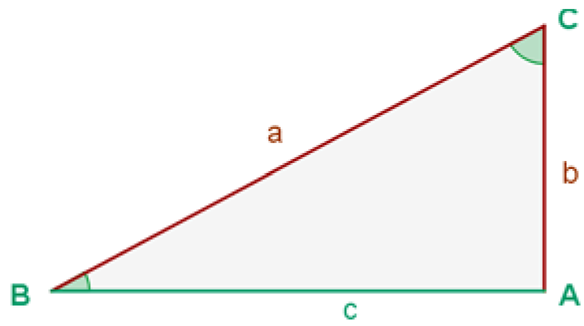
Resolver un triángulo es hallar sus lados, ángulos y área. Es necesario conocer dos lados del triángulo, o bien un lado y un ángulo distinto del recto.

1. Se conocen la hipotenusa y un cateto

$$B: \ \operatorname{sen} B = \frac{b}{a} \qquad B = \operatorname{arc\,sen} \frac{b}{a}$$

$$C = 90^\circ - B$$

$$c: \ \begin{cases} \cos B = \dfrac{c}{a} \quad c = a \cdot \cos B \\ c = \sqrt{a^2 - b^2} \end{cases}$$



Resolver el **triángulo** conociendo:

a = 415 m y b = 280 m.

sen B = 280/415 = 0.6747 B = arc sen 0.6747 = **42° 25′**

C = 90° - 42° 25′ = **47° 35′**

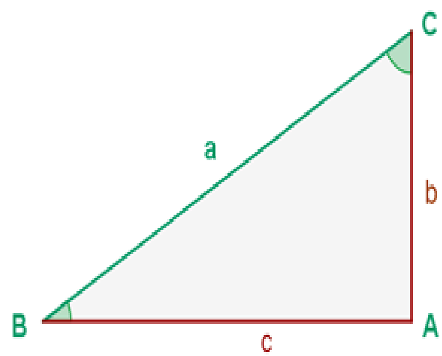
c = a cos B c = 415 · 0.7381 = **306. 31 m**

2. Se conocen los dos catetos

$$B: \ \operatorname{tg} B = \frac{b}{c} \qquad B = \operatorname{arc\,tg} \frac{b}{c}$$

$$C = 90° - B$$

$$a: \begin{cases} \text{sen } B = \dfrac{b}{a} \quad a = \dfrac{b}{\text{sen } B} \\ a = \sqrt{b^2 + c^2} \end{cases}$$



Resolver el **triángulo** conociendo:

b = 33 m y c = 21 m .

tg B = 33/21 = 1.5714 **B = 57° 32′**

C = 90° − 57° 32′ = **32° 28′**

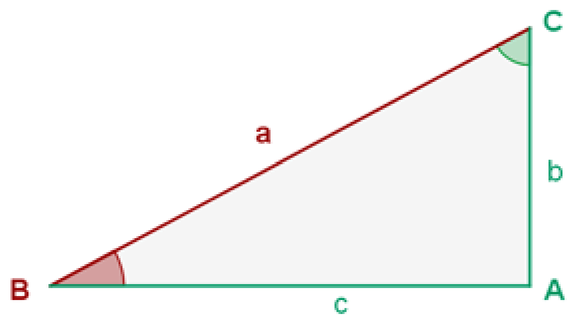
a = b/sen B a = 33/0.8347 = **39.12 m**

3. Se conocen la hipotenusa y un ángulo agudo

$$C = 90° - B$$

$$b: \ \text{sen } B = \frac{b}{a} \qquad b = a \cdot \text{sen } B$$

$$c: \begin{cases} \cos B = \dfrac{c}{a} \quad c = a \cdot \cos B \\ c = \sqrt{a^2 - b^2} \end{cases}$$



Resolver el **triángulo** conociendo:

a = 45 m y B = 22°.

C = 90° - 22° = **68°**

b = a sen 22°   b = 45 · 0.3746 = **16.85 m**

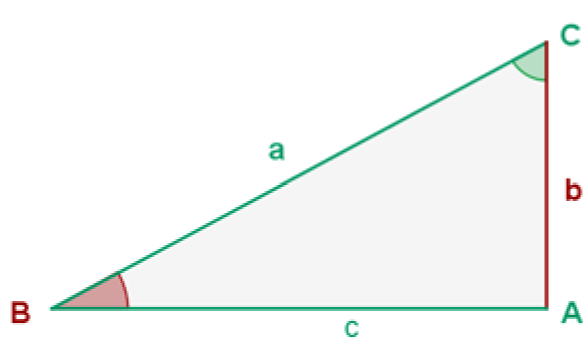
c = a cos 22°   c = 45 · 0.9272 = **41.72 m**

4. Se conocen un cateto y un ángulo agudo

$$C = 90° - B$$

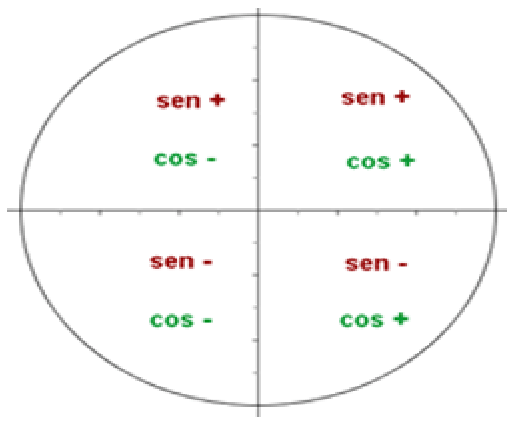
$$a: \ \text{sen } B = \frac{b}{a} \qquad a = \frac{b}{\text{sen } B}$$

$$c: \begin{cases} \text{cotg } B = \dfrac{c}{b} \quad c = b \cdot \text{cotg } B \\ c = \sqrt{a^2 - b^2} \end{cases}$$

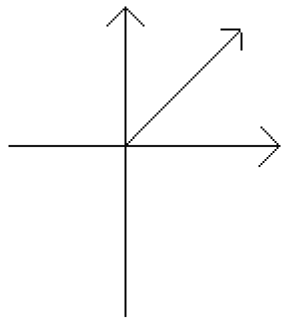


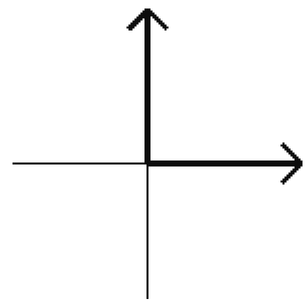
Si ahora, nos vamos al plano xy, es conveniente tener presente el signo, de cada razón trigonométrica según el cuadrante en que nos ubiquemos. Observemos

Signo de las razones trigonométricas



Ahora para ubicar ángulo en este sistema se toma en cuenta que un ángulo en un sistema de coordenadas rectangular está en la **posición normal o estándar** si su vértice está en el origen y su lado inicial a lo largo del eje positivo x. Si el lado terminal de un ángulo que está en la posición normal yace sobre un eje coordenado se dice que es un **ángulo cuadrantal**. Observa la ilustración a continuación.

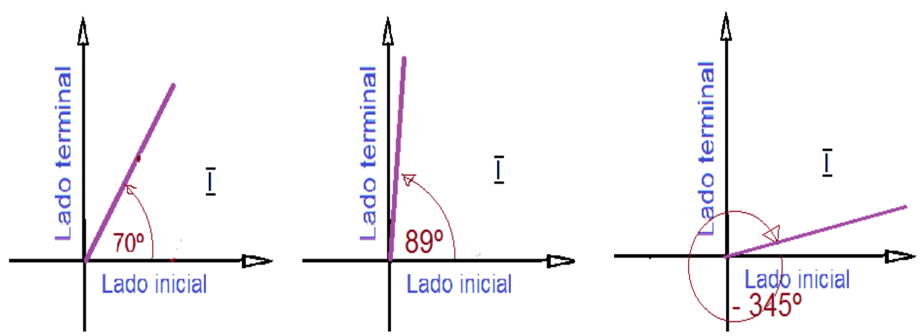




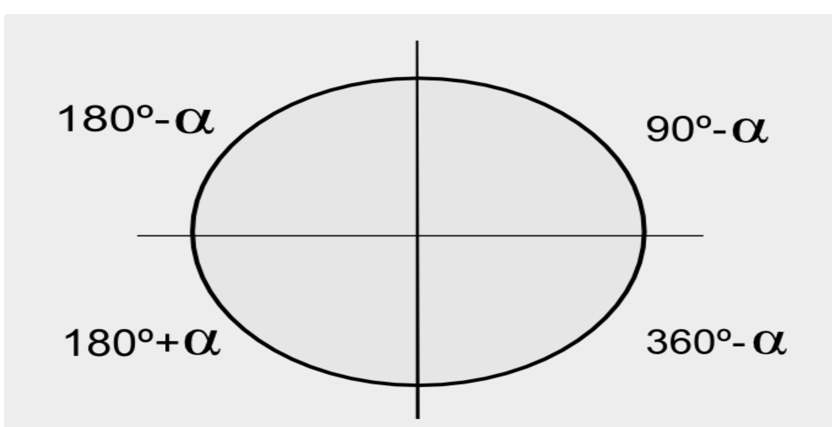
Angulo en posición normal Angulo cuadrantal

Así como los segmento se miden en pulgadas, centímetros o pies, los ángulos se miden comúnmente en **grados** o **radianes**.

Ejemplos gráficos para visualizar mejor.



Y esto es la receta, para calcular cualquier ángulo en cualquier cuadrante:



Link para practicar:

http://www.slideshare.net/SCHOOL_OF_MATHEMATICS/ngulos-en-posicin-normal

Por lo general, se trabajara con triángulos especiales, donde aparte del ángulo de 90 de grados, abra distintos ángulos con valores como 45 grados, 60 grados, 30 grados. Por lo que a continuación tenemos una tabla resumen.

Tabla de razones trigonométricas

α:	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$180°$	$270°$
sen	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\to \infty$	0	$\to -\infty$

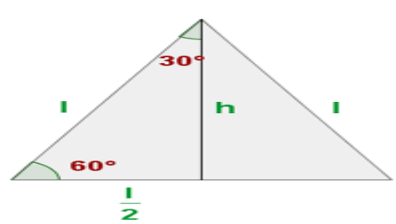
Veamos algunos ejemplos:

Razones trigonométricas de los ángulos de 30º y 60º

$$\text{sen } 30° = \frac{\frac{l}{2}}{l} = \frac{1}{2} \qquad \text{sen } 60° = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\,l}{l} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 30° = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\,l}{l} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos 60° = \frac{\frac{l}{2}}{l} = \frac{1}{2}$$

$$\text{tg } 30° = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \text{tg } 60° = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

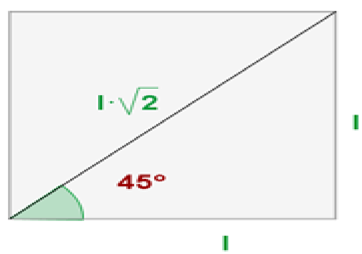


Razones trigonométricas del ángulo de 45º

$$\text{sen } 45^\circ = \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{tg } 45^\circ = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$$



A la hora de la reducción de identidades trigonométricas es importante tener presente las siguientes identidades.

$\cos^2 \alpha + \text{sen}^2 \alpha = 1$

$\sec^2 \alpha = 1 + \text{tg}^2 \alpha$

$\csc^2 \alpha = 1 + \cot^2 \alpha$

$$\text{cosec } \alpha = \frac{1}{\text{sen } \alpha}$$

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$$

$$\text{cotg } \alpha = \frac{1}{\text{tg } \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\text{sen } \alpha}$$

Sabiendo que sen α = 3/5, y que 90º <α <180°. Calcular las restantes razones trigonométricas del ángulo α.

$$\text{sen } \alpha = \frac{3}{5} \qquad \text{cosec } \alpha = \frac{5}{3}$$

$$\cos \alpha = -\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} = -\frac{4}{5} \qquad \sec \alpha = -\frac{5}{4}$$

$$\text{tg } \alpha = -\frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4} \qquad \text{cotg } \alpha = -\frac{4}{3}$$

Comprobar las **identidades trigonométricas**:

* $tg\, \alpha + \text{cotg } \alpha = \sec \alpha \cdot \text{cosec } \alpha$

$$tg\, \alpha + \text{cotg } \alpha = \frac{sen\, \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{sen\, \alpha} = \frac{sen^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\cos \alpha \cdot sen\, \alpha} =$$

$$= \frac{1}{\cos \alpha \cdot sen\, \alpha} = \sec \alpha \cdot \text{cosec } \alpha$$

* $\text{cotg}^2 a = \cos^2 a + (\text{cotg } a \cdot \cos a)^2$

$$\cos^2 a + (\text{cotg } a \cdot \cos a)^2 = \cos^2 a + \text{cotg}^2 a \cdot \cos^2 a =$$

$$\cos^2 a(1 + \text{cotg}^2 a) = \cos^2 a \cdot \text{cosec}^2 a = \frac{\cos^2 a}{sen^2 a} = \text{cotg}^2 a$$

* $\frac{1}{\sec^2 a} = sen^2 a \cdot \cos^2 a + \cos^4 a$

$$sen^2 a \cdot \cos^2 a + \cos^4 a = \cos^2 a(sen^2 a + \cos^2 a) = \cos^2 a = \frac{1}{\sec^2 a}$$

* $\operatorname{cotg} a \cdot \sec a = \operatorname{cosec} a$

$$\operatorname{cotg} a \cdot \sec a = \frac{\cos a}{\operatorname{sen} a} \cdot \frac{1}{\cos a} = \frac{1}{\operatorname{sen} a} = \operatorname{cosec} a$$

* $\sec^2 a + \operatorname{cosec}^2 a = \dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 a \cdot \cos^2 a}$

$$\sec^2 a + \operatorname{cosec}^2 a = \frac{1}{\cos^2 a} + \frac{1}{\operatorname{sen}^2 a} = \frac{\operatorname{sen}^2 a + \cos^2 a}{\operatorname{sen}^2 a \cdot \cos^2 a} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 a \cdot \cos^2 a}$$

Ángulos de elevación y depresión

La Trigonometría, para trabajar con objetos que se encuentran por sobre y por debajo de ángulo de visión u horizonte, utiliza ángulos verticales, aquellos ángulos que se forman en el plano entre la línea horizontal y alguna línea visual.

Hay dos tipos de ángulos verticales:

Ángulo de elevación

Es el ángulo vertical (agudo) formado por la línea horizontal y la línea visual cuando el objeto o punto observado se encuentra arriba de la línea horizontal.

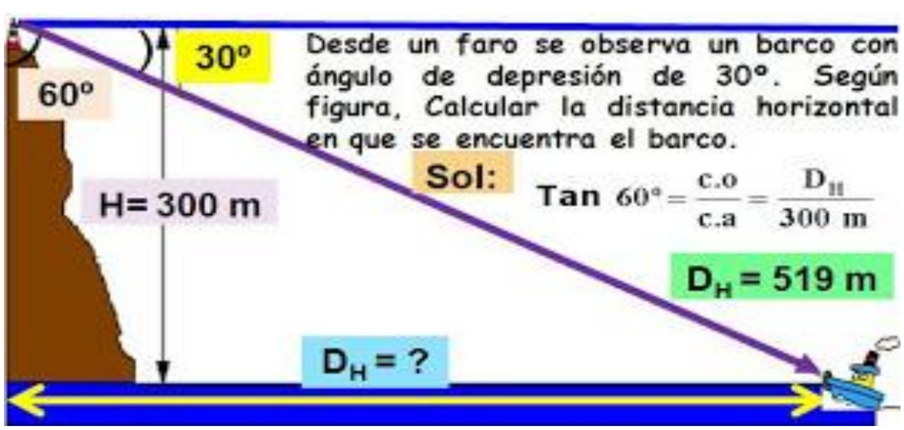
Ángulo de depresión

Es el ángulo vertical (agudo) formado por la línea horizontal y la línea visual cuan el objeto o punto observado está debajo de la línea horizontal.

Veamos algunos ejemplos resueltos

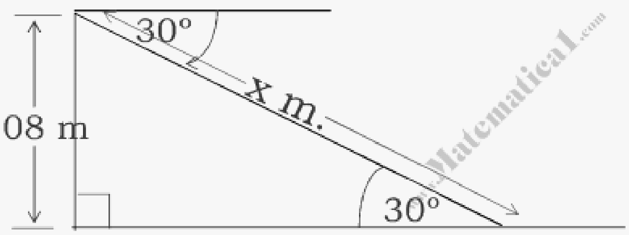
1.)

2.)



3.)

d) Un esquiador desciende una colina de 108 metros de altura con un ángulo de depresión de 30º.¿Qué distancia recorre el esquiador desde la cúspide hasta llagar al plano?



$$\boxed{\text{Sen } 30^\circ = \frac{108}{x}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2} = \frac{108}{x}$$

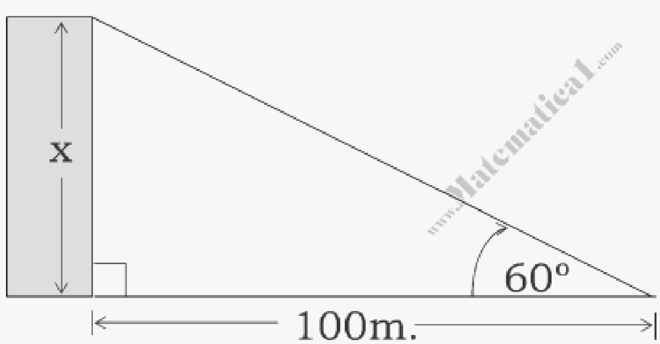
$$1 \cdot x = 2 \cdot 108$$

$$\boxed{x = 216 \text{ m.}}$$

Se busca una función trigonométrica que relacione los datos dados, en este caso es el ***seno.***

4.)

a) Calcular la altura de una torre si al alejarnos 100 metros de su base, se obtiene un punto el que determina una visual a la parte más alta de la torre la que forma con la superficie un ángulo de elevación de 60º.



$$\boxed{\text{Tg } 60^\circ = \frac{x}{100}}$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{3} = \frac{x}{100}$$

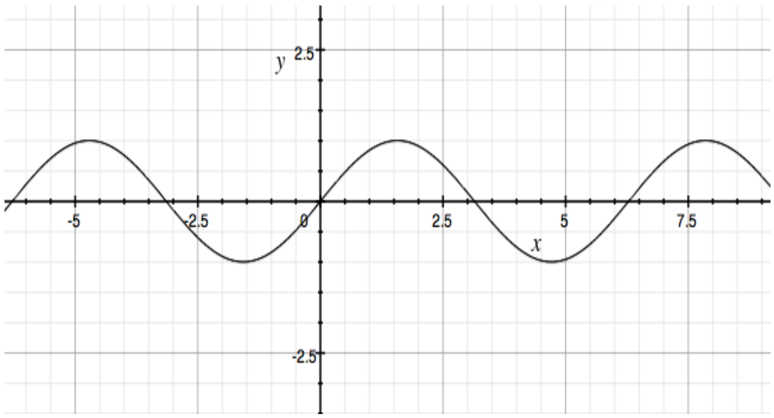
$$100\sqrt{3} = x$$

$$\boxed{x = 100\sqrt{3}\text{m.}}$$

Se busca una función trigonométrica que relacione los datos dados, en este caso el la ***tangente.***

Gráficas de las funciones trigonométricas

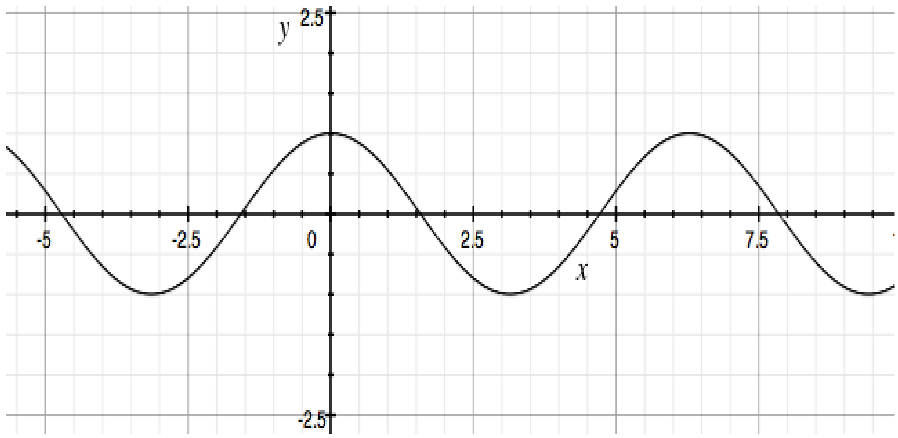
Función Seno



Características de la función seno

- **Dominio**: $\mathbb{R}$
- **Recorrido o Ámbito**: [-1, 1]
- **Período**: 2π
- **Continuidad**: Continua en $\forall x \in \mathbb{R}$
- **Impar**: sen(-x) = -sen x
- **Cortes con el eje OX:** $x = \{0 + \pi \cdot k\}$
- **Creciente en**: $\ldots \cup (-\pi/2, \pi/2) \cup (3\pi/2, 5\pi/2) \cup \ldots$
- **Decreciente en**: $\ldots \cup (\pi/2, 3\pi/2) \cup (5\pi/2, 7\pi/2) \cup \ldots$
- **Máximos**: $(\pi/2 + 2\pi \cdot k, 1) \qquad k \in \mathbb{Z}$
- **Mínimos**: $(3\pi/2 + 2\pi \cdot k, -1) \qquad k \in \mathbb{Z}$
- **Impar**: sen (-x) = -sen x
- **Cortes con el eje OX:** $x = \{0 + \pi \cdot k\}$

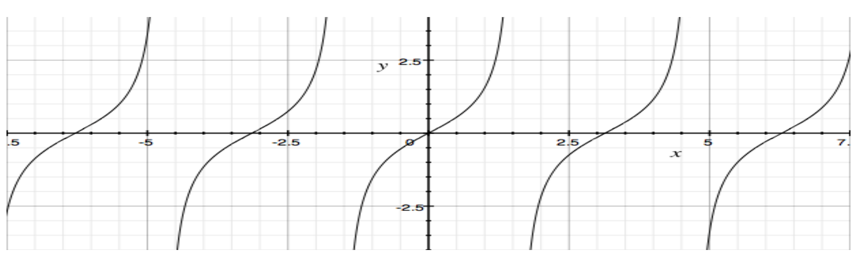
Función Coseno



Características de la función coseno

- **Dominio**: $\mathbb{R}$
- **Recorrido**: [-1, 1]
- **Período**: $2\pi \ \ rad$
- **Continuidad**: Continua en $\forall x \in \mathbb{R}$
- **Par**: cos(-x) = cos x
- **Cortes con el eje OX:** $x = \{\pi/2 + k\}$
- **Creciente en**: $\ldots \cup (-\pi, 0) \cup (\pi, 2\pi) \cup \ldots$
- **Decreciente en**: $\ldots \cup (0, \pi) \cup (2\pi, 3\pi) \cup \ldots$
- **Máximos**: $(2\pi \cdot k, 1) \qquad k \in \mathbb{Z}$
- **Mínimos**: $(\pi \cdot (2k+1), -1) \qquad k \in \mathbb{Z}$

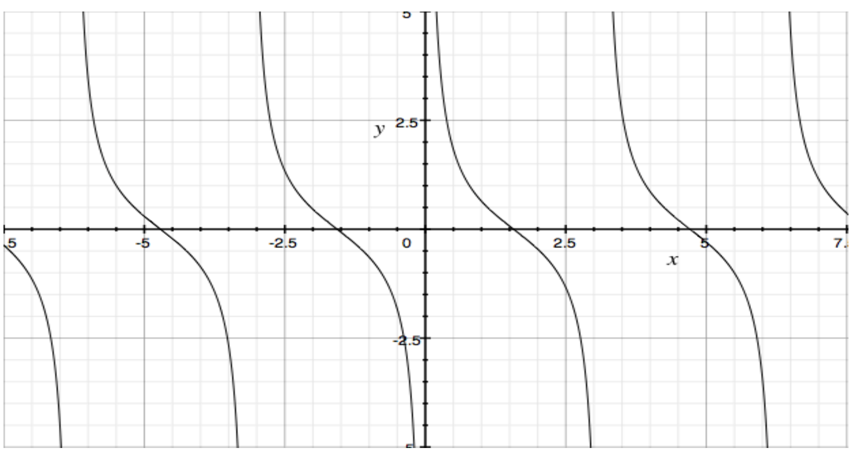
Tangente



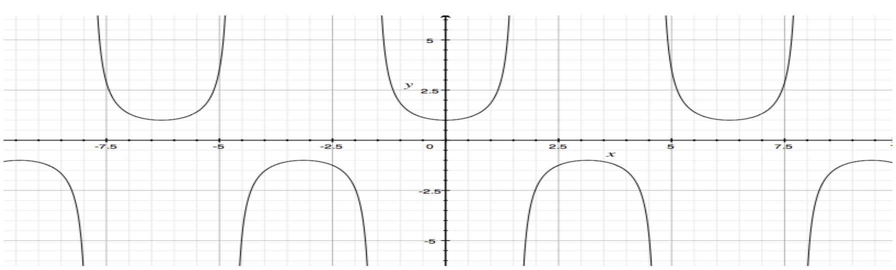
Características de la función tangente

- **Dominio**: $\mathbb{R} - \{(2k+1)\cdot\pi/2,\ k \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{R} - \{\ldots, -\pi/2,\ \pi/2, 3\pi/2,\ \ldots\}$
- **Recorrido**: $\mathbb{R}$
- **Continuidad**: Continua en $\forall x \in \mathbb{R} - \{(\pi/2 + \pi\cdot k)\}$
- **Período**: $\pi\ rad$
- **Cortes con el eje OX:** $x = \{0 + \pi\cdot k\}$
- **Impar**: tg(-x) = tg x
- **Creciente** en: $\mathbb{R}$
- **Máximos**: No tiene.
- **Mínimos**: No tiene.

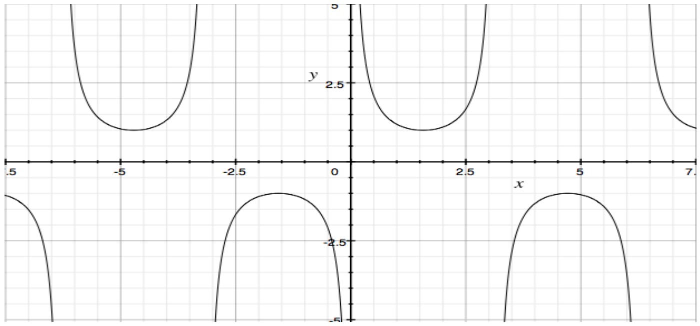
Cotangente



Secante



Cosecante



Resolución de ecuaciones trigonométricas

1. Se desarrollan expresiones, hasta obtener una sola expresión trigonométrica igualada a un número, mediante:

- Identidades trigonométricas fundamentales
- Razones trigonométricas de la suma y diferencia de ángulos
- Razones trigonométricas del ángulo doble
- Razones trigonométricas del ángulo mitad
- Transformaciones de sumas en productos

2. Obtenemos una expresión del tipo:

- sen u = n
- cos u = n
- tg u = n

Donde, por lo general, u = ax + b y n $\in \mathbb{R}$

Ejemplos de ecuaciones trigonométricas:

1ª sen(x)=1

2ª sen(2x)=2sen(x)

3ª $\cos^2$(x)-3sen(x)=3

Soluciones:

La primera es muy sencilla, no hay que dar los pasos indicados, sólo recordar la circunferencia trigonométrica y observar que 90º es el primer ángulo cuyo seno es El seno no vuelve a valer uno hasta que el ángulo no valga 90º+360º=540º, tras otra vuelta volverá a valer uno y así sucesivamente. Luego hay muchas soluciones, todos los ángulos x de la forma x=90º+k.360º, donde k es cualquier número entero. Si queremos expresar la solución en radianes
x=p/2+2.k.p radianes.

La segunda necesita que apliquemos el primer paso. Como sen(2x)=2sen(x).cos(x), podemos escribir la ecuación en la forma 2sen(x).cos(x)=2sen(x). Ahora si dividimos por 2 nos queda sen(x).cos(x)=sen(x).Y si además dividimos por sen(x) queda cos(x)=1. Cuidado porque esta división supone que sen(x) es distinto de 0.

Las soluciones de cos(x)=1 son x=0º+k.360º o bien x=2.k.p radianes. Obtenidas razonando sobre la circunferencia trigonométrica, como anteriormente.

Cuando sen(x)=0 no podemos dividir, esto ocurre para x=0º, 180º, 360º,... es decir x=k.180º. Pero estos valores son soluciones de la ecuación puesto que cuando sen(x)=0 también sen(x).cos(x)=sen(x), ya que queda 0=0.

Ahora bien las soluciones de sen(x)=0 incluyen a las de cos(x)=1, por tanto las soluciones de la ecuación pedida son x=k.180º o bien x=k.p radianes.

La tercera se convertirá en una ecuación con una sola razón trigonométrica si tenemos en cuenta la fórmula fundamental de la trigonometría.

Pasaremos de $\cos^2(x)-3\text{sen}(x)=3$ a la ecuación $1-\text{sen}^2(x)-3\text{sen}(x)=3$, ordenando y agrupando queda $\text{sen}^2(x)+3\text{sen}(x)+2=0$. Ya está en función de una sóla razón y de un sólo ángulo.

Cambiamos ahora sen(x) por z y nos quedará $z^2+3z+2=0$. esta ecuación tiene las soluciones z=-1 y z=-2, que nos proporcionan sen(x)=-1 y sen(x)=-2.

sen(x)=-1 tiene como soluciones x=270º+k.360º o bien x=3p/2+2.k.p radianes.

sen(x)=-2 no tiene solución alguna. Recurrimos continuamente a la circunferencia trigonométrica.

Luego las soluciones de la tercera ecuación son: x=270º+k.360º o bien x=3p/2+2.k.p radianes.

Resuelva:

$$sen^2\, x - cos^2\, x = \frac{1}{2}$$

Multiplicamos los dos miembros por -1:

$$cos^2\, x - sen^2\, x = -\frac{1}{2} \rightarrow cos\, 2x = -\frac{1}{2}$$

$$2x = \begin{cases} 120^\circ + 360^\circ \cdot k \\ 240^\circ + 360^\circ \cdot k \end{cases} \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$$

Soluciones:

$$x = \begin{cases} 60^\circ + 360^\circ \cdot k \\ 120^\circ + 360^\circ \cdot k \end{cases} \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$$

Link para practicar:

http://www.dmae.upct.es/~pepemar/mateprimero/trigonometria/probleectrig.htm

LINKS DE INTERES

http://www.vitutor.com/al/trigo/triActividades.html

http://www.vitutor.com/geo/eso/acActividades.html

http://www.mamutmatematicas.com/ejercicios/circulo.php

http://www.slideshare.net/mariamarchetti/problemas-razones-trigonometricas-5896801

http://www.ematematicas.net/trigonometria.php?a=4

http://es.scribd.com/doc/61328130/POBLEMAS-SOBRE-ANGULOS-DE-ELEVACION-Y-DE-DEPRESION-CON-LA-SOLUCION

http://www.ceibal.edu.uy/userfiles/P0001/ObjetoAprendizaje/HTML/Aplicando%20la%20trigonometria_Silvana%20Realini2.elp/altura_de_una_palmera.html