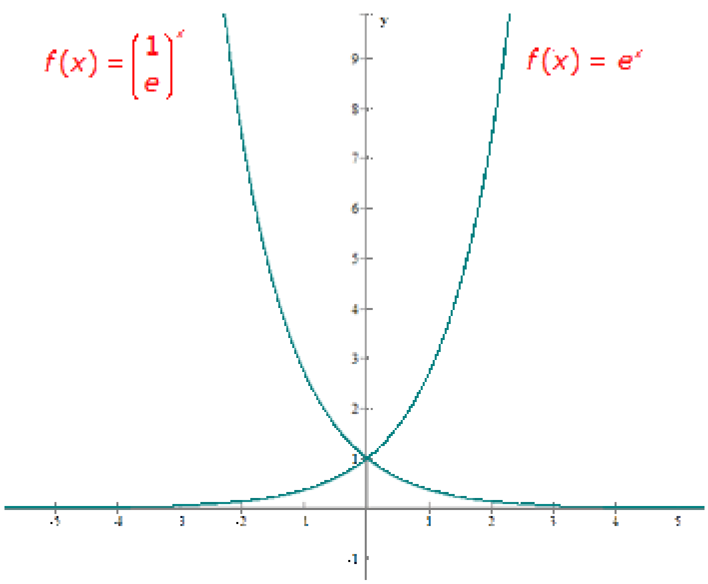
Función Exponencial y Logarítmica

La primera se define como

Sea a un número real positivo. La función que a cada número real x le hace corresponder la potencia a^x se llama **función exponencial de base *a* y exponente *x*.** Como $a^x > 0$ para todo $x \in \Re$, la función exponencial es una función de $\Re$ en $\Re^+$.

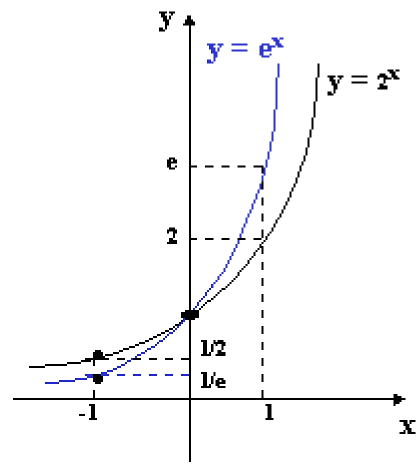
Propiedades de la función exponencial

- Dominio: $\mathbb{R}$.
- Recorrido: $\mathbb{R}^+$.
- Es continua.
- Los puntos (0, 1) y (1, a) pertenecen a la gráfica.
- Es inyectiva $\forall$ a ≠ 1(ninguna imagen tiene más de un original).
- Creciente si a >1.
- Decreciente si a < 1.
- Las curvas $y = a^x$ e $y = (1/a)^x$ son simétricas respecto del eje OY.

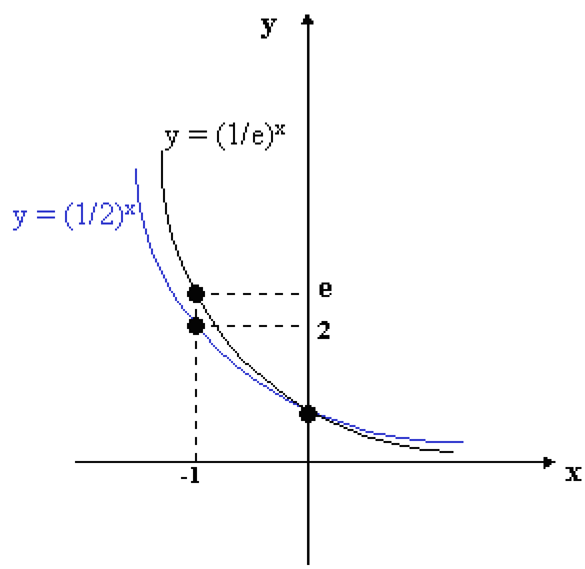


Dos puntos importantes.

Si la base de una función exponencial es mayor a uno. La función será estrictamente creciente.



Si por el contrario la base es menor a uno; la función será estrictamente decreciente



Observación final: cuando *a* = *e*, donde *e* es el número irracional cuya representación decimal con sus primeras cifras decimales, es *e* = 2.7182818284…., la función exponencial e^x, se llama: **función exponencial de base *e*** y, frecuentemente, se denota por **Exp(x) =** e^x **.** Veamos el grafico:

A continuación procederemos a resolver algunas ecuaciones exponenciales, no sin antes enunciar al gunas propiedades de los exponenciales, que nos haran más facil la resolución de los problemas.

Ecuación exponencial

Una **ecuación exponencial** es aquella **ecuación** en la que la **incógnita** aparece en el **exponente**.

Para **resolver una ecuación exponencial** vamos a tener en cuenta:

1. $a > 0 \qquad a \neq 1$
2. $a^{x_1} = a^{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$
3. Las **propiedades de las potencias**.

- $a^0 = 1$ ·
- $a^1 = a$
- $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$
- $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$
- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
- $a^m : a^n = a^{m-n}$
- $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
- $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$
- $a^n : b^n = (a : b)^n$

Resolver las siguientes ecuaciones exponenciales:

* $2^{2x-1} = 4$

$2^{2x-1} = 2^2$ $\quad 2x - 1 = 2$ $\quad x = \frac{3}{2}$

* $\sqrt[2x-1]{3^{x-3}} = \sqrt{27}$

$3^{\frac{x-3}{2x-1}} = 3^{\frac{3}{2}}$ $\quad \frac{x-3}{2x-1} = \frac{3}{2}$ $\quad x = -\frac{3}{4}$

* $2^{x+1} + 2^x + 2^{x-1} = 28$

$2^x \cdot 2 + 2^x + \frac{2^x}{2} = 28$

$2^x \left(2 + 1 + \frac{1}{2}\right) = 28$

$2^x \cdot \frac{7}{2} = 28$ $\quad 2^x = 2^3$ $\quad x = 3$

* $2^{1-x^2} = \frac{1}{8}$

$2^{1-x^2} = 2^{-3}$ $\quad 1 - x^2 = -3; \quad x^2 = 4$ $\quad x = \pm 2$

* $\sqrt[3]{8^x} = 65536$

$\left(2^3\right)^{\frac{x}{3}} = 2^{16}$ $\quad x = 16$

* $3^{x^2-1} = 134$

$$\log 3^{(x^2-1)} = \log 134$$

$$(x^2-1)\log 3 = \log 134$$

$$x^2 - 1 = \frac{\log 134}{\log 3} = 4.4582 \qquad x^2 = 5.4582 \qquad x = \pm 2.336$$

Función Exponencial Natural

La **función exponencial natural** es la función exponencial

$$f(x) = e^x$$

con base **e**. Es común referirse a ella como la función exponencial.

Ejemplos

Evaluemos las siguientes funciones exponenciales

Función original $f(x)=3^x$

$$a)\ f(2) = 3^2 = 9$$

$$b)\ f\left(-\frac{2}{3}\right) = 3^{-2/3} \approx 0.4807$$

$$c)\ f\left(\sqrt{2}\right) = 3^{\sqrt{2}} \approx 4.7288$$

Veamos 2 ejemplos de aplicaciones de la función exponencial

1.

Modelo exponencial para la diseminación de un virus

Una enfermedad infecciosa comienza a diseminarse en una ciudad pequeña con 10,000 habitantes. Después de t días, el número de personas que ha sucumbido al virus se modela mediante la función:

$$v(t) = \frac{10000}{5 + 1245e^{-0.97t}}$$

Contesta:

b)Cuántas personas infectadas hay por el virus. (t = 0)

b) Calcule el número de personas infectadas despues de un día y depués de cinco días.

c) Grafique la función y describa el comportamiento.

Solución

a) Cuántas personas infectadas hay por el virus (t = 0).

$$v(t) = \frac{10000}{5 + 1245e^{0}} = \frac{10000}{1250} = 8$$

8 personas tienen inicialmente la enfermedad.

a) Calcule el número de personas infectadas después de un día y cinco días. (t = 1, t = 2, t = 5)

Días	Personas infectadas
1	21
2	54
5	678

c) Grafique la función y describa el comportamiento.

El contagio comienza lento, luego aumenta con rapidez y luego se estabiliza cuando estan infectados cerca de 2000 personas.

2.

Interes compuestos

El interés compuesto se calcula mediante la fórmula

$$A(t) = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

donde: A(t) = cantidad después de t años

P = principal

r = tasa de interés por año

n = número de veces que el interés se compone por año

t = número de años

Cálculo del interés compuesto

Una suma de \$1000 se invierte a una tasa de interés de 12% anualmente. Calcule las cantidades en la cuenta después de tres años si el interés se compone anualmente, cada medio año, por trimestre, mensualmente o diario.

Solución:

Datos

$P = 1000$

$r = 12\% = 0.12$

$t = 3$

Cálculo del interés compuesto

Capitalización	n	Cantidad después de tres años
Anual	1	$1000\left(1+\frac{0.12}{1}\right)^{1(3)} = 1404.93$
Semianual	2	$1000\left(1+\frac{0.12}{2}\right)^{2(3)} = 1418.52$
Trimestral	4	$1000\left(1+\frac{0.12}{4}\right)^{4(3)} = 1425.76$
Mensual	12	$1000\left(1+\frac{0.12}{12}\right)^{12(3)} = 1430.77$
Diaria	365	$1000\left(1+\frac{0.12}{365}\right)^{365(3)} = 1433.24$

3.

Interés compuesto en forma continua

- El interés compuesto en forma continua se calcula mediante la fórmula

$$A(t) = Pe^{rt}$$

donde A(t) = cantidad después de t años

P = principal

r = tasa de interés por año

t = número de años

Calcular el interés compuesto de manera continua

- Calcule la cantidad después de tres años si se invierten \$1000 a una tasa de interés de 12% por año, capitalizado de forma continua.
- Solución:

Datos: P = 1000

$r = 0.12$

$t = 3$

$$A(t) = Pe^{rt}$$

$$A(3) = 1000e^{(0.12)3} = 1000e^{0.36} = 1433.33$$

Se puede comparar con el ejemplo anterior.

Sección 4.1
1 – 4, 5 – 10, 11 – 14, 25 – 38, 64 – 67

Función Logarítmica

Está función es la inversa de la exponencial.

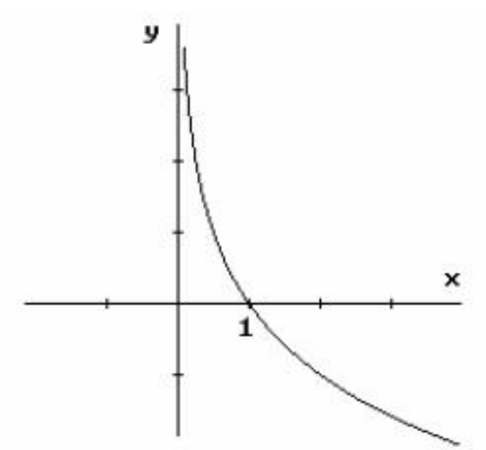
$$\log_a x = y \Rightarrow a^y = x \qquad\qquad a > 0 \text{ y } a \neq 1$$

Siendo **a** la **base**, **x** el **número** e **y** el **logaritmo**.

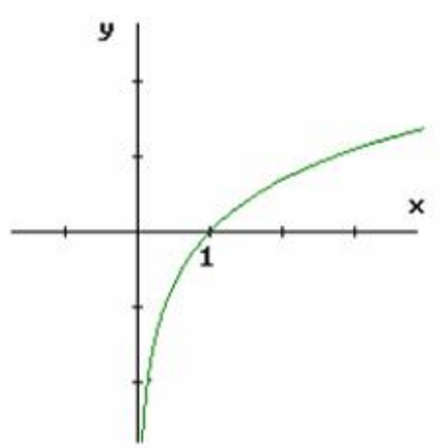
Propiedades de las funciones logarítmicas

- Dominio: $\mathbb{R}^+$
- Recorrido: $\mathbb{R}$
- Es continua.
- Los puntos (1, 0) y (a, 1) pertenecen a la gráfica.
- Es inyectiva (ninguna imagen tiene más de un original).
- Creciente si a>1.
- Decreciente si a<1.

Estas dos últimas características las podemos observar en el siguiente grafico:



grafica de y= $\log_a$X para a > 1



grafica de y= $\log_a$X para 0 > a < 1

- No existe el logaritmo de un número con base negativa. $\nexists \log_{-a} x$
- No existe el logaritmo de un número negativo $\nexists \log_a(-x)$
- No existe el logaritmo de cero.

  $\nexists \log_a 0$

- El logaritmo de 1 es cero.
  $\log_a 1 = 0$
- El logaritmo en base a de a es uno.
  $\log_a a = 1$
- El logaritmo en base a de una potencia en base a es igual al exponente.
  $\log_a a^n = n$
- El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores.

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_2(4 \cdot 8) = \log_2 4 + \log_2 8 = 2 + 3 = 5$$

- El logaritmo de un cociente es igual al logaritmo del dividendo menos el logaritmo del divisor.

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_2\left(\frac{8}{4}\right) = \log_2 8 - \log_2 4 = 3 - 2 = 1$$

- El logaritmo de una potencia es igual al producto del exponente por el logaritmo de la base.

$$\log_a(x^n) = n \log_a x$$

$$\log_2(8^4) = 4\log_2 8 = 4 \cdot 3 = 12$$

- ✷ El logaritmo de una raíz es igual al cociente entre el logaritmo del radicando y el índice de la raíz.

$$\log_a\left(\sqrt[n]{x}\right) = \frac{1}{n}\log_a x$$

$$\log_2\left(\sqrt[4]{8}\right) = \frac{1}{4}\log_2 8 = \frac{1}{4}\cdot 3 = \frac{3}{4}$$

- ✷ Cambio de base:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

$$\log_2 4 = \frac{\log_4 4}{\log_4 2} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

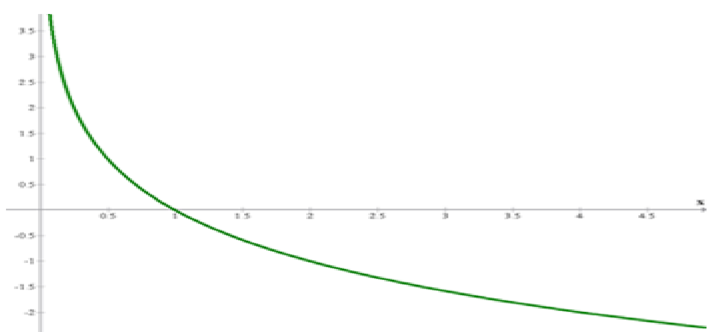
Siendo **a** la **base**, **x** el **número** e **y** el **logaritmo**.

A continuación, empezaremos a ver ciertas propiedades descritas, ya sea en gráficos, o en la resolución de ecuaciones

Grafiquemos la siguiente función

$$f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$$

x	$f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$
1/8	**3**
1/4	**2**
1/2	**1**
1	**0**
2	**−1**
4	**−2**
8	**−3**



Ahora se procederá a pasar de un logaritmo a su forma exponencial

* $\log_2 4 = 2$ $\qquad$ $2^2 = 4$

* $\log_2 1 = 0$ $\qquad$ $2^0 = 1$

Calcular por la **definición de logaritmo** el valor de y.

* $\log_{\frac{1}{2}} 0.25 = y$

  $\left(\frac{1}{2}\right)^y = 0.25$ $\qquad$ $\left(\frac{1}{2}\right)^y = \left(\frac{1}{2}\right)^2$ $\qquad$ $y = 2$

* $\log_{\sqrt{5}} 125 = y$ $\quad$ $\sqrt{5}^y = 125$ $\qquad$ $5^{\frac{1}{2}y} = 5^3$ $\qquad$ $y = 6$

* $\log 0.001 = y$

  $10^y = 0.001$ $\qquad$ $10^y = 10^{-3}$ $\qquad$ $y = -3$

* $\ln \frac{1}{e^5} = y$ $\quad$ $e^y = \frac{1}{e^5}$ $\qquad$ $e^y = e^{-5}$ $\qquad$ $y = -5$

* $\log_{\sqrt{3}} \sqrt[5]{\frac{1}{81}} = y$ $\quad$ $\sqrt{3}^y = \sqrt[5]{\frac{1}{81}}$ $\qquad$ $3^{\frac{1}{2}y} = 3^{-\frac{4}{5}}$ $\qquad$ $y = -\frac{8}{5}$

Ahora aplicando todas las propiedades vistas resuelva la ecuación logarítmica

* $\boxed{\log 2 + \log\left(11 - x^2\right) = 2\log(5 - x)}$

Solución

$$\log\left[2\left(11 - x^2\right)\right] = \log(5 - x)^2$$

$$2\left(11 - x^2\right) = (5 - x)^2$$

$$3x^2 - 10x + 3 = 0$$

$$x = 3 \qquad 11 - 3^2 > 0 \qquad 5 - 3 > 0$$

$$x = \frac{1}{3} \qquad 11 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 > 0 \qquad 5 - \frac{1}{3} > 0$$

* $\boxed{2\log x = 3 + \log\frac{x}{10}}$

$$2\log x = 3 + \log x - \log 10$$

$$\log x = 3 - 1 \qquad \log x = 2 \qquad x = 100$$

* $\boxed{\log x + \log(x + 3) = 2\log(x + 1)}$

$$\log\left[x(x+3)\right] = \log(x+1)^2$$

$$x(x+3) = (x+1)^2$$

$$x^2 + 3x = x^2 + 2x + 1 \qquad x = 1$$

$$\ast \quad \boxed{\frac{\log\left(16-x^2\right)}{\log(3x-4)} = 2}$$

$$\log\left(16-x^2\right) = 2\log(3x-4)$$

$$\log\left(16-x^2\right) = \log(3x-4)^2 \qquad \left(16-x^2\right) = (3x-4)^2$$

$$10x^2 - 24x = 0 \qquad x = 0 \qquad x = \frac{24}{10} = \frac{12}{5}$$

Resolver las siguientes ecuaciones logarítmicas

1. $2\log x = 3 + \log\frac{x}{10}$
2. $\log x + \log(x+3) = 2\log(x+1)$
3. $4\log\left(\frac{x}{5}\right) + \log\left(\frac{625}{4}\right) = 2\log x$
4. $2\log x - 2\log(x+1) = 0$
5. $\log x = \frac{2-\log x}{\log x}$
6. $\log\left(25-x^3\right) - 3\log(4-x) = 0$
7. $\frac{\log\left(16-x^2\right)}{\log(3x-4)} = 2$
8. $\frac{\log\left(35-x^3\right)}{\log(5-x)} = 3$
9. $\log 2 + \log\left(11-x^2\right) = 2\log(5-x)$

10. $$\log_5 x + \frac{\log_5 125}{\log_5 x} = \frac{7}{2}$$

Algunos ejercicios resueltos

✷ $$\boxed{\log x + \log(x+3) = 2\log(x+1)}$$

$$\log\left[x(x+3)\right] = \log(x+1)^2$$

$$x(x+3) = (x+1)^2$$

$$x^2 + 3x = x^2 + 2x + 1 \qquad x = 1$$

✷ $$\boxed{4\log\left(\frac{x}{5}\right) + \log\left(\frac{625}{4}\right) = 2\log x}$$

$$\log\left(\frac{x}{5}\right)^4 + \log\left(\frac{625}{4}\right) = \log x^2 \qquad \log\left(\frac{x^4}{625} \cdot \frac{625}{4}\right) = \log x^2$$

$$\log\left(\frac{x^4}{4}\right) = \log x^2 \qquad \frac{x^4}{4} = x^2 \qquad x^4 - 4x^2 = 0$$

$$x = 0 \qquad x = -2 \qquad x = 2$$

✷ $$\boxed{2\log x - 2\log(x+1) = 0}$$

$$\log x^2 - \log(x+1)^2 = \log 1$$

$$\log\frac{x^2}{(x+1)^2} = \log 1 \qquad \frac{x^2}{(x+1)^2} = 1$$

$$2x + 1 = 0 \qquad x = -\frac{1}{2}$$

Sin solución

$$\boxed{\frac{\log\left(35-x^3\right)}{\log\left(5-x\right)}=3}$$

$$\log\left(35-x^3\right)=3\log\left(5-x\right)$$

$$\log\left(35-x^3\right)=\log\left(5-x\right)^3 \qquad \left(35-x^3\right)=\left(5-x\right)^3$$

$$x^2-5x+6=0 \qquad x=2 \qquad x=3$$