Álgebra

Leyes de potencias

1. $1^n = 1$, para todo n	9. $a^x \div a^y = a^{x-y}$
2. $(-1)^n = -1$, si n es impar	10. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
3. $(-1)^n = 1$, si n es par	11. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
4. $a^0 = 1$, para todo a ≠ 0	12. $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n = \frac{b^n}{a^n}$
5. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$	13. $a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$
6. $\underbrace{a^x \cdot a^x \cdot a^x ... a^x}_{n veces} = a^{xn}$	14. $ab^{\frac{n}{m}} = a\sqrt[m]{b^n}$
7. $\underbrace{a^x + a^x + a^x + ... + a^x}_{n veces} = na^x$	
8. $(a^x)^n = a^{xn}$	

Fórmulas Notables

I. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	V. $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
II. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	VI. $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab - b^2)$
III. $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$	VII. $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$
IV. $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	

Factorización

Factor Común: la factorización del polinomio es la multiplicación del factor común, por el polinomio que resulta de dividir cada término del polinomio dado entre el factor común.

1. $ax + ay = a(x+y)$
2. $a(x+y) + b(y+x) = (x+y)(a+b)$
3. $a(x+y) - b(y+x) = (x+y)(a-b)$

Factorización de trinomios: $x^2 + bx + c$

Si el término c se puede descomponer en dos factores, c_1 y c_2 tales que $c_1 + c_2 = b$, entonces $x^2 + bx + c$ se factoriza así,

$$x^2 + bx + c = (x + c_1)(x + c_2)$$

Factorización por agrupación:
a) se agrupan los términos que tienen los factores comunes.
b) se factorizan por factor común los grupos hechos en el primer paso.
c) En el paso anterior debe quedar una expresión algebraica con un factor común, el cual puede ser un binomio, un trinomio, o un polinomio. Finalmente se factoriza por factor común.

$$\begin{aligned} am+px+ax+mp &= (am+mp)+(px+ax) \\ &= m(a+p)+x(p+a) \\ &= (a+p)(m+x) \end{aligned}$$

Factorización por diferencia de cuadrados: cada vez que se tenga la diferencia de un binomio cuadrático de la forma a^2-b^2, se podrá factorizar como $(a+b)(a-b)$, aplicando la propiedad de la tercera fórmula notable.

Fracciones algebraicas

1. *Simplificación*: se factoriza el numerador y el denominador y, luego, se cancelan los factores iguales del numerador con los del denominador.

2. *Suma y resta*:
a) se calcula el mínimo común denominador, que estará formado por el producto de los factores comunes y no comunes de mayor exponente de todos los denominadores.
b) luego, el común denominador se divide por cada denominador y el cociente se multiplica por el respectivo numerador;
c) seguidamente se efectuarán las multiplicaciones para luego reducir los términos semejantes.
d) finalmente se simplifica la fracción resultante.

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd} \qquad \frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd}$$

3. *Multiplicación*: se factorizan los numeradores y los denominadores, para cancelar los factores iguales de los numeradores con los de los denominadores, luego, se multiplican entre sí los numeradores y los denominadores.

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$$

4. *División*: para dividir fracciones se invierte el divisor y la división se cambia por multiplicación.

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$$

5. *Fracción compleja*: se multiplican los extremos y los medios y los productos se colocan en el numerador y denominador respectivamente.

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{ad}{bc}$$

Ecuaciones de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$

1. Si el discriminante es positivo ($b^2 - 4ac$ >0), las dos raíces de la ecuación son reales y diferentes.
2. Si el discriminante es nulo ($b^2 - 4ac$ =0), las dos raíces de la ecuación son reales e iguales.
3. Si el discriminante es negativo ($b^2 - 4ac$ <0) no tiene soluciones reales y por lo tanto la solución es el conjunto vacío $S = \{\phi\}$.

<u>Fórmula General</u>: las raíces de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ se pueden obtener con la siguiente fórmula: $\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, donde $\Delta = b^2 - 4ac$

Problemas

Al tratar de resolver un problema, debemos distinguir cuatro fases, las cuales son:

1. Comprender el problema, es decir, entender lo que se pide.
2. Interpretar las relaciones que existen entre los diversos elementos que ligan la incógnita con los datos.
3. Trazar un plan que conducirá a la solución del problema.
4. Poner en ejecución el plan.

Sistema de ecuaciones $\begin{Bmatrix} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{Bmatrix}$

1. Método de sustitución:
a) se despeja cualquiera de las dos variables en cualquiera de las dos ecuaciones
b) luego, se sustituye el resultado del despeje en la otra ecuación, resultando así, una ecuación con una sola variable.
c) Se resuelve la ecuación para encontrar el valor de la variable que corresponde.
d) sustituimos dicho valor en la ecuación del paso a) y resolvemos para encontrar el valor de la otra variable.

Funciones

Función: una función definida de un conjunto A en un conjunto B, es una relación en la cual a cada elemento x del conjunto A, que llamaremos dominio, se le asigna por medio de algún criterio o procedimiento un único elemento $f(x)$ del conjunto B, que llamaremos codominio.

Conceptos Básicos

$f(x)$ se lee "f de x", e indica función de x. La expresión $f(x)$ se puede sustituir por "y", es decir que $f(x)$=y. El par ordenado (x, y) también se puede escribir como $(x, f(x))$.

Variable independiente: en la expresión $f(x)$, x es la variable independiente mientras que $f(x)$ es la variable dependiente de x.

Partes de una función: en la función $f : A \to B$, A es el dominio y B el codominio. Si $x \in A$ entonces $f(x) \in B$. Los elementos x se llaman preimágenes y los $f(x)$ imágenes de x.

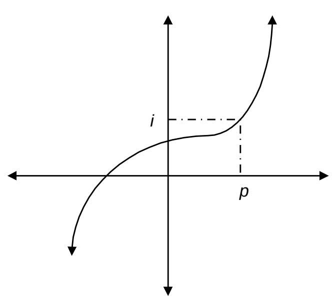
Imágenes: la imagen de un determinado elemento del dominio de una función es un único elemento de su codominio. Las imágenes se obtienen sustituyendo los elementos del dominio por la variable independiente en el criterio de la función.

Ámbito: el conjunto de todas las imágenes de una función de A en B se llama ámbito o rango, y se denota como $f(A)$. En consecuencia, el ámbito de una función es subconjunto del codominio. $(f(A) \subset B)$.

Preimágenes: la preimagen de un elemento del ámbito de una función es al menos un elemento de su dominio, y se obtiene igualando su criterio con el elemento dado. La solución de la ecuación resultante es la preimagen si ella pertenece al dominio.

Gráfico: el gráfico de una función f se denota por G_f y se define como el conjunto de todos los pares ordenados $(x, f(x))$ para los cuales x es un elemento del dominio y $f(x)$ un elemento del codominio.

Gráfica: la gráfica de una función es la representación de todos los pares ordenados del gráfico en un sistema de coordenadas rectangulares. $(p,i) \in G_f \Rightarrow f(p) = i$



Dominio máximo: el dominio máximo de una función de variable real, es el conjunto de los números reales para los cuales está bien definida esta función. Analicemos los dos siguientes tipos de funciones:

I. Función racional: el dominio máximo es el conjunto de los números reales menos el conjunto formado con todos los números reales que hagan cero el denominador de la fracción. Pro comprensión este concepto se define así:

$$D_f = IR - \left\{ x / x \in IR, d(x) = 0,\ f(x) = \frac{n(x)}{d(x)} \right\}$$

II. Función radical de índice par: el dominio máximo es el conjunto de los números reales cuyos subradicales, cuando se sustituyen por la variable independiente, resultan mayores o iguales que cero. Por comprensión, este concepto se define así:

$$D_f = IR - \{ x / x \in IR, s(x) \geq 0; f(x) = \sqrt{s(x)} \}$$

Función inyectiva: una función f se dice que es inyectiva si cada elemento del ámbito es imagen de una y solo una preimagen. También podemos definir así: una función es inyectiva si se cumple que para cualquier para de elementos distintos del dominio sus respectivas imágenes son distintas.

$$x_1 \neq x_2 \text{ y } f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow f \text{ es inyectiva}$$

Función sobreyectiva: una función f es sobreyectiva si y solo si el ámbito es igual al codominio.

$$f : A \to B, f(A) = B \Rightarrow f \text{ es sobreyectiva}$$

También la podemos definir así: una función es sobreyectiva si cada elemento del codominio es imagen de al menos un elemento del dominio.

Función biyectiva: una función es biyectiva si el ámbito es igual al codominio y cada elemento del ámbito tiene una y solo una preimagen.

Función creciente: una función f es creciente si para cualquier par de elementos x_1 y x_2 de su dominio, se cumple que:

$$x_1 < x_2 \text{ y } f(x_1) \leq f(x_2) \text{, o bien } x_1 > x_2 \text{ y } f(x_1) \geq f(x_2)$$

Función estrictamente creciente: una función f es estrictamente creciente si para cualquier par de elementos x_1 y x_2 de su dominio, se cumple que:

$$x_1 < x_2 \text{ y } f(x_1) < f(x_2) \text{, o bien } x_1 > x_2 \text{ y } f(x_1) > f(x_2)$$

<u>Función decreciente</u>: una función f es decreciente si para cualquier par de elementos x_1 y x_2 de su dominio, se cumple que:

$$x_1 < x_2 \text{ y } f(x_1) \geq f(x_2), \text{ o bien } x_1 > x_2 \text{ y } f(x_1) \leq f(x_2)$$

<u>Función estrictamente decreciente</u>: una función f es estrictamente decreciente si para cualquier par de elementos x_1 y x_2 de su dominio, se cumple que:

$$x_1 < x_2 \text{ y } f(x_1) > f(x_2), \text{ o bien } x_1 > x_2 \text{ y } f(x_1) < f(x_2)$$

Función lineal

Una función cuya gráfica es una recta no vertical le llamaremos una función lineal, y su criterio es de la forma f(x)=mx+b, donde m y b son constantes, y se llama respectivamente pendiente e intersección con el eje y.

<u>Pendiente</u>: la pendiente de una función lineal se denota con la letra m, e indica la inclinación de la recta con respecto al eje x. Si la recta pasa por los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) la pendiente se obtiene con la fórmula:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Con respecto a la pendiente, la función lineal es:

I. Estrictamente creciente si m>0 ⤢

II. Constante si m=0 $\longleftrightarrow$

III. Estrictamente decreciente si m<0 ⤡

<u>Rectas paralelas</u>: las gráficas de dos funciones lineales representan rectas paralelas si y solo si sus pendientes son iguales.

$$f \text{ y } g \text{ son funciones lineales y } f \,//\, g \Leftrightarrow m_f = m_g$$

<u>Rectas perpendiculares</u>: las gráficas de dos funciones lineales representan rectas perpendiculares si y solo si el producto de sus pendientes es -1.

$$f \text{ y } g \text{ son funciones lineales y } f \perp g \Leftrightarrow m_f \cdot m_g = -1$$

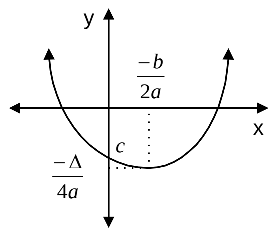
<u>Intersecciones con los ejes</u>: el punto de intersección de la gráfica de una función con el eje ***x*** se obtiene sustituyendo la ***y*** por cero, y luego despejando la ***x***. El punto de intersección la gráfica de una función con el eje ***y*** se obtiene sustituyendo la ***x*** por cero, y luego despejando la ***y***.

<u>Función inversa</u>: la inversa de una función biyectiva f se denota f^{-1}. Teniendo el criterio de f, el criterio de su inversa lo obtenemos igualando el criterio de f a ***y***. Luego despejamos la ***x***. Finalmente, sustituimos la ***x*** por $f^{-1}(x)$ y la ***y*** por ***x***.

Función cuadrática

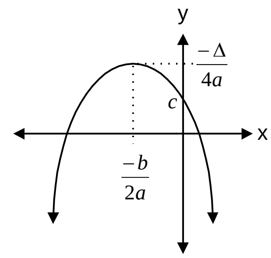
Una función cuyo criterio es de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ se llama función cuadrática. Su gráfica es una parábola que puede tener una de las seis formas siguientes:

1)



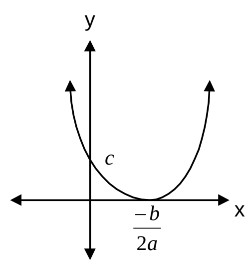
La gráfica de $f(x) = ax^2 + bx + c$ es una parábola cóncava hacia arriba si a>0, y corta al eje ***x*** en dos puntos si Δ >0.

2)



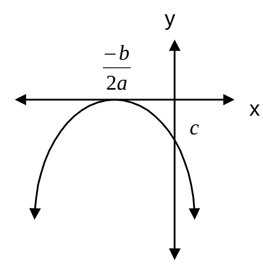
La gráfica de $f(x) = ax^2 + bx + c$ es una parábola cóncava hacia abajo si a<0, y corta al eje ***x*** en dos puntos si Δ >0.

3)



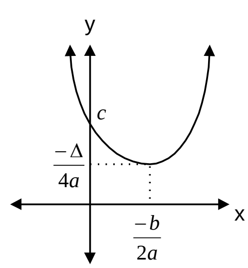
La gráfica de $f(x) = ax^2 + bx + c$ es una parábola cóncava hacia arriba si a>0, y corta al eje ***x*** en un punto si Δ =0.

4)



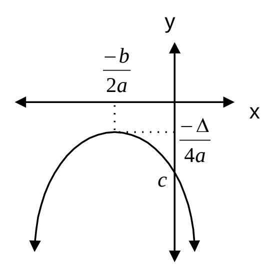
La gráfica de $f(x) = ax^2 + bx + c$ es una parábola cóncava hacia abajo si a<0, y corta al eje ***x*** en un punto si Δ =0.

5)



La gráfica de $f(x) = ax^2 + bx + c$ es una parábola cóncava hacia arriba si a>0, y no corta al eje ***x*** si Δ <0.

6)



La gráfica de $f(x) = ax^2 + bx + c$ es una parábola cóncava hacia abajo si a<0, y no corta al eje ***x*** si Δ 0.

Para las seis parábolas anteriores tenemos que:

I. El vértice está determinado por la fórmula:

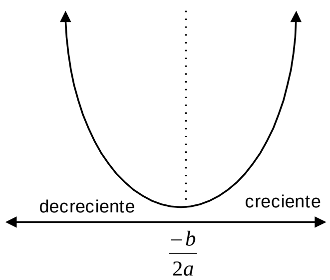
$$V=\left(\frac{-b}{2a},\frac{-\Delta}{4a}\right)$$

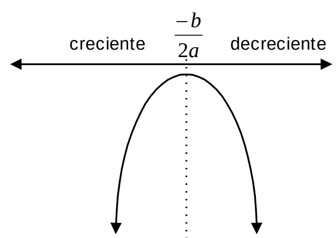
II. El eje de simetría de cualquiera de las seis parábolas está determinado por la ecuación: $x=\dfrac{-b}{2a}$

III. El ámbito de una función cuadrática definida de IR en IR está determinado por:

I. $\left[\dfrac{-\Delta}{4a},+\infty\right[$ si a>0 II. $\left]-\infty,\dfrac{-\Delta}{4a}\right]$ si a<0

IV. Los intervalos de monotonía en una función cuadrática de IR en IR están determinados de $-\infty$ al eje de simetría y del eje de simetría a $+\infty$





La función es estrictamente creciente si se cumple que:

1) a>0 y $x\in\left]\dfrac{-b}{2a},+\infty\right[$ 2) a<0 y $x\in\left]-\infty,\dfrac{-b}{2a}\right[$

La función es estrictamente decreciente si se cumple que:

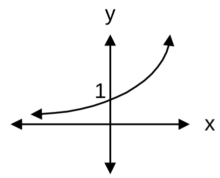
1) a>0 y $x\in\left]-\infty,\dfrac{-b}{2a}\right[$ 2) a<0 y $x\in\left]\dfrac{-b}{2a},+\infty\right[$

Función exponencial

La función exponencial está definida así: $f: IR \to IR^{+}$; $f(x) = a^{x}$, a>0; $a \neq 1$

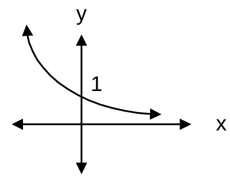
La función exponencial es estrictamente creciente si a>1, o estrictamente decreciente si 0<a<1. La gráfica para cada uno de estos dos casos es:

a>1



estrictamente creciente

0<a<1



estrictamente decreciente

Ecuaciones exponenciales: las ecuaciones exponenciales tienen la incógnita en el exponente; para resolverlas seguimos una de las siguientes proposiciones, según corresponda:

a) $x^{n} = y^{n} \Rightarrow x = y$ para $n \neq 0$

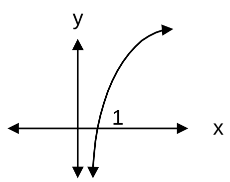
b) $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Rightarrow f(x) = g(x)$ para $a \neq 0$ y $a \neq 1$

Función logarítmica

La función logarítmica está definida así: $f: IR^{+} \to IR$; $f(x) = \log_{a} x$, a>0; $a \neq 1$

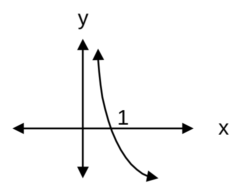
La función logarítmica es estrictamente creciente si a>1, o estrictamente decreciente si 0<a<1. La gráfica para cada uno de estos dos casos es:

a>1



estrictamente creciente

0<a<1



estrictamente decreciente

Propiedades de los logaritmos

$a^{y} = x \Leftrightarrow y = \log_{a} x$	$\log_{a}(B \cdot C) = \log_{a} B + \log_{a} C$
$-\log_{a} B = \log_{\frac{1}{a}} B$	$\log_{a}\left(\dfrac{B}{C}\right) = \log_{a} B - \log_{a} C$
$\log_{a} a = 1$	$\log_{a} B = \dfrac{\log_{x} B}{\log_{x} a}$
$\log_{a} 1 = 0$	$a^{\log_{a} x} = x$
$\log_{a} B^{n} = n \log_{a} B$	$\log_{e} A = \ln A$
$\log_{a} \sqrt[n]{B} = \dfrac{1}{n} \log_{a} B$	

Ecuaciones logarítmicas: para resolver ecuaciones logarítmicas se utilizan las propiedades anteriores y, además, según sea el caso se utiliza:

1) $\log_{a} B = 1 \Leftrightarrow a^{1} = B$ 2) $\log_{a} x = \log_{a} y \Leftrightarrow x = y$

TRIGONOMETRÍA (Repaso de 9°)

Es el estudio de las relaciones entre los lados y los ángulos de un triángulo. Esto se realiza a través de las llamadas **funciones trigonométricas** de los ángulos (o goniométricas).

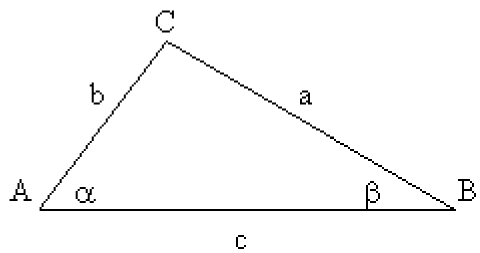
Ahora, la palabra trigonometría se deriva de trígono, significa triángulo y metron, medida, o sea por lógica, trigonometría corresponde a "medida de triángulos".

Investigando la historia de la trigonometría averiguamos que los hindúes fueron los primeros que hicieron un equivalente a la función seno (¿qué será eso?). También supimos de su utilización por parte de los egipcios en la construcción de las pirámides, en los trabajos astronómicos de Aristarco, Menelao y Ptolomeo, quienes hicieron la división del ángulo en 360º. Y como trabajo fundamental esta el hecho por Viete, que estableció el uso de la trigonometría en el análisis matemático y en la matemática aplicada.

Funciones Trigonometricas en el Triángulo Rectángulo

Ahora definiremos las funciones trigonométricas en el triángulo rectángulo. Más adelante, las utilizaremos, a través de diversos teoremas y relaciones, en todo tipo de triángulos.

Consideremos el triángulo ABC, rectángulo en C, de la figura y trabajemos con los ángulos α y β de él.



seno de $\alpha = \dfrac{\text{cateto opuesto a } \alpha}{\text{hipotenusa}} = \dfrac{a}{c}$

coseno de $\alpha = \dfrac{\text{cateto adyacente a } \alpha}{\text{hipotenusa}} = \dfrac{b}{c}$

tangente de $\alpha = \dfrac{\text{cateto opuesto a } \alpha}{\text{cateto adyacente a } \alpha} = \dfrac{a}{b}$

cotangente de $\alpha = \dfrac{\text{cateto adyacente a } \alpha}{\text{cateto opuesto a } \alpha} = \dfrac{b}{a}$

secante de $\alpha = \dfrac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente a } \alpha} = \dfrac{c}{b}$

cosecante de $\alpha = \dfrac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto a } \alpha} = \dfrac{c}{a}$

Del mismo modo, para el ángulo β se obtiene las razones trigonométricas siguientes:

seno de $\beta = \frac{b}{c}$

coseno de $\beta = \frac{a}{c}$

tangente de $\beta = \frac{b}{a}$

cotangente de $\beta = \frac{a}{b}$

secante de $\beta = \frac{c}{a}$

cosecante de $\beta = \frac{c}{b}$

OJO: hacemos la sugerencia, "aprendan las definiciones trigonométricas en palabras ya que las letras que designan los catetos y la hipotenusa pueden variar".

Funciónes Trigonométricas de un Angulo Agudo

Una vez dadas las definiciones, nos damos cuenta que:

sen $\alpha =$ cos β

cos α = sen β

tg α = cot β

cot α = tg β

sec α = cosec β

cosec α = sec β

y como $\alpha + \beta$ = 90º (triángulo ABC), entonces β = 90 - α que al reeemplazarlo en las igualdades anteriores se obtiene:

sen $\alpha =$ cos (90 - α)

cos α = sen (90 - α)

tg α = cot (90 - α)

cot α = tg (90 - α)

sec α = cosec (90 - α)

cosec α = sec (90 - α)