Polinomios

Primero que todo vamos a definirlos como aquella expresión algebraica de la forma:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + ... + a_1 x^1 + a_0$$

Siendo a_n, a_{n-1} ... a_1, a_o números, llamados coeficientes.

n un número natural.

Seguidamente hablaremos del grado del polinomio o rango.

Grado de un polinomio

El grado de un polinomio P(x) es el mayor exponente al que se encuentra elevada la variable x.

Clasificación de un polinomio según su grado

Primer grado

$P(x) = 3x + 2$

Segundo grado

$P(x) = 2x^2 + 3x + 2$

Tercer grado

$P(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 2$

Tipos de polinomios

Polinomio nulo

Es aquel **polinomio** que tiene todos sus coeficientes nulos.

Polinomio homogéneo

Es aquel **polinomio** en el que todos sus términos o monomios son del mismo grado.

$P(x) = 2x^2 + 3xy$

Polinomio heterogéneo

Es aquel **polinomio** en el que sus términos no son del miso grado.

$P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 3$

Polinomio completo

Es aquel **polinomio** que tiene todos los términos desde el término independiente hasta el término de mayor grado.

$P(x) = 2x^3 + 3x^2 + 5x - 3$

Polinomio ordenado

Un **polinomio** está **ordenado** si los **monomios** que lo forman están escritos de **mayor a menor grado**.

$P(x) = 2x^3 + 5x - 3$

Polinomios iguales

Dos **polinomios** son iguales si verifican:

- Los dos **polinomios** tienen el **mismo grado**.
- Los **coeficientes** de los términos del mismo grado son i**guales**.

$P(x) = 2x^3 + 5x - 3$

$Q(x) = 5x - 3 + 2x^3$

Polinomios semejantes

Dos **polinomios** son semejantes si verifican que tienen **la misma parte literal.**

$P(x) = 2x^3 + 5x - 3$

$Q(x) = 5x^3 - 2x - 7$

Valor numérico de un polinomio

Es el resultado que obtenemos al sustituir la variable x por un número cualquiera.

$P(x) = 2x^3 + 5x - 3 \; ; \; x = 1$

$P(1) = 2 \cdot 1^3 + 5 \cdot 1 - 3 = 2 + 5 - 3 = 4$

El hecho de que estemos hablando de polinomios, no significa que solo nos sirvan para clasificarlos o saber diferenciarlos de los números reales. Con los polinomios también se realizan operaciones suma, resta, divisiones, multiplicaciones, simplificaciones. Lo veremos en detalle a continuación

Para sumar dos polinomios se suman los coeficientes de los términos del mismo grado.

$P(x) = 2x^3 + 5x - 3$ $\qquad Q(x) = 4x - 3x^2 + 2x^3$

1. **Ordenamos** los **polinomios**, si no lo están.

$Q(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x$

$P(x) + Q(x) = (2x^3 + 5x - 3) + (2x^3 - 3x^2 + 4x)$

2. **Agrupamos** los **monomios** del **mismo grado**.

$P(x) + Q(x) = 2x^3 + 2x^3 - 3x^2 + 5x + 4x - 3$

3. **Sumamos los monomios semejantes**.

$P(x) + Q(x) = 4x^3 - 3x^2 + 9x - 3$

También podemos sumar polinomios escribiendo uno debajo del otro, de forma que los monomios semejantes queden en columnas y se puedan sumar.

$P(x) = 7x^4 + 4x^2 + 7x + 2$ $\qquad Q(x) = 6x^3 + 8x +3$

$$\begin{array}{lllll} 7x^4 & & +4x^2 & +7x & +2 \\ & 6x^3 & & +8x & +3 \\ \hline 7x^4 & +6x^3 & +4x^2 & +15x & +5 \end{array}$$

$P(x) + Q(x) = 7x^4 + 6x^3 + 4x^2 + 15x + 5$

Resta de polinomios

La resta de polinomios consiste en **sumar el opuesto del sustraendo**.

$P(x) - Q(x) = (2x^3 + 5x - 3) - (2x^3 - 3x^2 + 4x)$

$P(x) - Q(x) = 2x^3 + 5x - 3 - 2x^3 + 3x^2 - 4x$

$P(x) - Q(x) = 2x^3 - 2x^3 + 3x^2 + 5x - 4x - 3$

$P(x) - Q(x) = 3x^2 + x - 3$

El producto de dos fracciones algebraicas es otra fracción algebraica donde el numerador es el producto de los numeradores y el denominador es el producto de los denominadores.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \cdot \frac{R(x)}{S(x)} = \frac{P(x) \cdot R(x)}{Q(x) \cdot S(x)}$$

Multiplicar las fracciones algebraicas:

$$\frac{x^2 - 2x}{x^2 - 5x + 6} \cdot \frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 - 4} =$$

$$= \frac{(x^2 - 2x) \cdot (x^2 + 4x + 4)}{(x^2 - 5x + 6) \cdot (x^2 - 4)} =$$

$$= \frac{x(x - 2) \cdot (x + 2)^2}{(x - 2) \cdot (x - 3) \cdot (x - 2) \cdot (x + 2)} =$$

$$= \frac{x(x + 2)}{(x - 2) \cdot (x - 3)}$$

A continuación una que otra identidad útil que nos permitirán trabajar y simplificar de mejor manera nuestros polinomios:

- **Binomio al cuadrado**

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2 \cdot a \cdot b + b^2$

$(x + 3)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = x^2 + 6x + 9$

$(2x - 3)^2 = (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 3 + 3^2 = 4x^2 - 12x + 9$

- **Suma por diferencia**

$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$

$(2x + 5) \cdot (2x - 5) = (2x)^2 - 5^2 = 4x^2 - 25$

- **Binomio al cubo**

$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 \pm b^3$

$(x + 3)^3 = x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot 3 + 3 \cdot x \cdot 3^2 + 3^3 =$

$= x^3 + 9x^2 + 27x + 27$

$(2x - 3)^3 = (2x)^3 - 3 \cdot (2x)^2 \cdot 3 + 3 \cdot 2x \cdot 3^2 - 3^3 =$

$= 8x^3 - 36x^2 + 54x - 27$

- **Trinomio al cuadrado**

$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2 \cdot a \cdot b + 2 \cdot a \cdot c + 2 \cdot b \cdot c$

$(x^2 - x + 1)^2 =$

$= (x^2)^2 + (-x)^2 + 1^2 + 2 \cdot x^2 \cdot (-x) + 2\, x^2 \cdot 1 + 2 \cdot (-x) \cdot 1 =$

$= x^4 + x^2 + 1 - 2x^3 + 2x^2 - 2x =$

$= x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1$

- **Suma de cubos**

$a^3 + b^3 = (a + b) \cdot (a^2 - ab + b^2)$

$8x^3 + 27 = (2x + 3)\,(4x^2 - 6x + 9)$

- **Diferencia de cubos**

$a^3 - b^3 = (a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2)$

$8x^3 - 27 = (2x - 3)\,(4x^2 + 6x + 9)$

- **Producto de dos binomios que tienen un término común**

$(x + a)\,(x + b) = x^2 + (a + b)\,x + ab$

$(x + 2)\,(x + 3) =$

$= x^2 + (2 + 3) \cdot x + 2 \cdot 3 =$

$= x^2 + 5x + 6$

Para efectos de bachillerato, se procederá a usar polinomios de un grado máximo de 2. Y con ello resolveremos ecuaciones o sistemas de ecuaciones. Partimos de las siguientes premisas y teoremas:

- La factorización de un polinomio, empieza con estos dos teoremas

Teorema del resto

El resto de la división de un polinomio P(x), entre un polinomio de la forma x - a es el valor numérico de dicho polinomio para el valor: x = a.

Teorema del factor

El polinomio P(x) es divisible por un polinomio de la forma x - a si y sólo si P(x = a) = 0.

Al valor x = a se le llama raíz o cero de P(x).

Observaciones

1. Los ceros o raíces son divisores del término independiente del polinomio.
2. A cada raíz del tipo x = a le corresponde un binomio del tipo (x −a).

3. Podemos expresar un polinomio en factores al escribirlo como producto de todos los binomios del tipo x — a, que se correspondan a las raíces x = a que se obtengan.
4. La suma de los exponentes de los binomios ha de ser igual al grado del polinomio.
5. Todo polinomio que no tenga término independiente admite como raíz x = 0, ó lo que es lo mismo, admite como factor x.
6. Un polinomio se llama irreducible o primo cuando no puede descomponerse en factores.

FACTORIZACIÓN

Lo primero es ver si en la expresión algebraica se puede sacar factor común veamos:

Consiste en aplicar la propiedad distributiva.

$a \cdot b + a \cdot c + a \cdot d = a\,(b + c + d)$

Descomponer en factores sacando factor común y hallar las raíces

1 $x^3 + x^2 = x^2\,(x + 1)$

La raíces son: $x = 0$ y $x = -1$

2 $2x^4 + 4x^2 = 2x^2\,(x^2 + 2)$

Sólo tiene una raíz $X = 0$; ya que el polinomio, $x^2 + 2$, no tiene ningún valor que lo anule; debido a que al estar la x al cuadrado siempre dará un número positivo, por tanto es irreducible.

3 $x^2 - ax - bx + ab = x\,(x - a) - b\,(x - a) = (x - a) \cdot (x - b)$

La raíces son $x = a$ y $x = b$.

IGUALDAD NOTABLE

DIFERENCIA DE CUADRADOS

Una diferencia de cuadrados es igual a suma por diferencia.

$a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$

Descomponer en factores y hallar las raíces

1 $x^2 - 4 = (x + 2) \cdot (x - 2)$

Las raíces son $x = -2$ y $x = 2$

2 $x^4 - 16 = (x^2 + 4) \cdot (x^2 - 4) = (x + 2) \cdot (x - 2) \cdot (x^2 + 4)$

Las raíces son $x = -2$ y $x = 2$

Trinomio cuadrado perfecto

Un trinomio cuadrado perfecto es igual a un binomio al cuadrado.

$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$

Descomponer en factores los trinomio cuadrados perfectos y hallar sus raíces

$$\begin{array}{ccccc} 9 & + & 6x & + & x^2 = (3 + x)^2 \\ \downarrow & & \uparrow & & \downarrow \\ 3^2 & & 2 \cdot 3 \cdot x & & x^2 \end{array}$$

La raíz es $x = -3$, y se dice que es una raíz doble.

$$x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$$

$$\downarrow \quad \uparrow \quad \downarrow$$

$$x^2 \quad 2 \cdot x \cdot 2 \quad 2^2$$

La raíz es x = 2.

Trinomio de segundo grado

Para descomponer en factores el trinomio de segundo grado P(x) = $ax^2 + bx + c$, se iguala a cero y se resuelve la ecuación de 2º grado. Si las soluciones a la ecuación son x_1 y x_2, el polinomio descompuesto será:

$$ax^2 + bx + c = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$$

Descomponer en factores los trinomios de segundo grado y hallar sus raíces

$$x^2 - 5x + 6$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 6}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} \nearrow x_1 = \frac{6}{2} = 3 \\ \searrow x_2 = \frac{4}{2} = 2 \end{cases}$$

$$x^2 - 5x + 6 = (x-2) \cdot (x-3)$$

Las raíces son x = 3 y x = 2.

$$x^2 - x - 6$$

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 + 4 \cdot 6}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} \nearrow x_1 = \frac{6}{2} = 3 \\ \searrow x_2 = \frac{-4}{2} = -2 \end{cases}$$

$$x^2 - x - 6 = (x + 2) \cdot (x - 3)$$

Las raíces son x = 3 y x = − 2.

Descomponer en factores los trinomios de cuarto grado de exponentes pares y hallar sus raíces

$x^4 - 10x^2 + 9$

$x^2 = t$

$x^4 - 10x^2 + 9 = 0$

$t^2 - 10t + 9 = 0$

$$t = \frac{10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \cdot 9}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 36}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{10 \pm 8}{2} = \begin{cases} \nearrow t_1 = \frac{18}{2} = 9 \\ \searrow t_2 = \frac{2}{2} = 1 \end{cases}$$

$x^2 = 9 \qquad x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$

$x^2 = 1 \qquad x = \pm\sqrt{1} = \pm 1$

$x^4 - 10x^2 + 9 = (x + 1) \cdot (x - 1) \cdot (x + 3) \cdot (x - 3)$

$x^4 - 2x^2 - 3$

$x^2 = t$

$t^2 - 2t - 3 = 0$

$$t = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 + 4 \cdot 3}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} \nearrow t_1 = \dfrac{6}{2} = 3 \\ \searrow t_2 = \dfrac{-2}{2} = -1 \end{cases}$$

$x^2 = 3 \qquad x = \pm\sqrt{3}$

$x^2 = -1 \qquad x = \pm\sqrt{-1} \in \mathbb{R}$

$x^4 - 2x^2 + 3 = (x^2 + 1) \cdot (x + \sqrt{3}) \cdot (x - \sqrt{3})$

Factorización de un polinomio de grado superior a dos

Utilizamos el teorema del resto y la regla de Ruffini para encontrar las raíces enteras.

Descomposición de un polinomio de grado superior a dos y cálculo de sus raíces

$P(x) = 2x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 6$

1. Tomamos los divisores del término independiente: ±1, ±2, ±3.
2. Aplicando el teorema del resto sabremos para que valores la división es exacta.

$P(1) = 2 \cdot 1^4 + 1^3 - 8 \cdot 1^2 - 1 + 6 = 2 + 1 - 8 - 1 + 6 = 0$

3. Dividimos por Ruffini.

	2	1	−8	−1	6
1		2	3	−5	−6
	2	3	−5	−6	0

4Por ser la división exacta, D = d · c .

$(x - 1) \cdot (2x^3 + 3x^2 - 5x - 6)$

Una raíz es x = 1.

Continuamos realizando las mismas operaciones al segundo factor.

Volvemos a probar por 1 porque el primer factor podría estar elevado al cuadrado.

$P(1) = 2 \cdot 1^3 + 3 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 - 6 \neq 0$

$P(-1) = 2 \cdot (-1)^3 + 3 \cdot (-1)^2 - 5 \cdot (-1) - 6 = -2 + 3 + 5 - 6 = 0$

	2	3	−5	−6
−1		−2	−1	6
	2	1	−6	0

$(x - 1) \cdot (x + 1) \cdot (2x^2 + x - 6)$

Otra raíz es x = −1.

El tercer factor lo podemos encontrar aplicando la ecuación de 2º grado o tal como venimos haciéndolo, aunque tiene el inconveniente de que sólo podemos encontrar raíces enteras.

El 1 lo descartamos y seguimos probando por −1.

$P(-1) = 2 \cdot (-1)^2 + (-1) - 6 \neq 0$

$P(2) = 2 \cdot 2^2 + 2 - 6 \neq 0$

$P(-2) = 2 \cdot (-2)^2 + (-2) - 6 = 2 \cdot 4 - 2 - 6 = 0$

$$\begin{array}{r|rrr} & 2 & 1 & -6 \\ -2 & & -4 & 6 \\ \hline & 2 & -3 & 0 \end{array}$$

$(x - 1) \cdot (x + 1) \cdot (x + 2) \cdot (2x - 3)$

Sacamos factor común 2 en último binomio y encontramos una raíz racional.

$2x - 3 = 2 (x - 3/2)$

La factorización del polinomio queda:

$P(x) = 2x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 6 = 2 (x -1) \cdot (x +1) \cdot (x +2) \cdot (x - 3/2)$

Las raíces son : $x = 1$, $x = - 1$, $x = -2$ y $x = 3/2$

Todas las raíces son racionales

Puede suceder que el polinomio no tenga raíces enteras y sólo tenga raíces racionales.

En este caso tomamos los divisores del término independiente dividido entre los divisores del término con mayor grado, y aplicamos el teorema del resto y la regla de Ruffini.

$P(x) = 12x^3 + 8x^2 - 3x - 2$

Probamos por: $\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{6}, \pm\frac{2}{3}$.

$$P\left(\frac{1}{2}\right) = 12\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 8\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3\cdot\left(\frac{1}{2}\right) - 2 = 0$$

$$\begin{array}{c|cccc} & 12 & 8 & -3 & -2 \\ \frac{1}{2} & & 6 & 7 & 2 \\ \hline & 12 & 14 & 4 & 0 \end{array}$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)\cdot\left(12x^2 + 14x + 4\right)$$

$$12\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 14\cdot\frac{1}{2} + 4 \neq 0$$

$$12\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 14\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) + 4 = 0$$

$$\begin{array}{c|ccc} & 12 & 14 & 4 \\ -\frac{1}{2} & & -6 & -4 \\ \hline & 12 & 8 & 0 \end{array}$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)\cdot\left(x + \frac{1}{2}\right)\cdot\left(12x + 8\right)$$

Sacamos factor común 12 en el tercer factor.

$$12\cdot\left(x - \frac{1}{2}\right)\cdot\left(x + \frac{1}{2}\right)\cdot\left(x + \frac{2}{3}\right)$$

Fracciones algebraicas

Una fracción algebraica es el cociente de dos polinomios y se representa por:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \qquad Q(x) \neq 0$$

P(x) es el numerador y Q(x) el denominador.

Fracciones algebraicas equivalentes

Dos fracciones algebraicas

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \quad y \quad \frac{R(x)}{S(x)}$$

son equivalentes, y lo representamos por:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{R(x)}{S(x)}$$

si se verifica que P(x) · S(x) = Q(x) · R(x).

Dada una fracción algebraica, si multiplicamos el numerador y el denominador de dicha fracción por un mismo polinomio distinto de cero, la fracción algebraica resultante es equivalente a la dada.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x) \cdot M(x)}{Q(x) \cdot M(x)} \qquad \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x) : M(x)}{Q(x) : M(x)}$$

Simplificación de fracciones algebraicas

Para simplificar una fracción algebraica se divide el numerador y el denominador de la fracción por un polinomio que sea factor común de ambos.

Reducción de fracciones algebraicas a común denominador

Dadas dos fracciones algebraicas, reducirlas a común denominador es encontrar dos fracciones algebraicas equivalentes con el mismo denominador.

1. Descomponemos los denominadores en factores para hallarles el mínimo común múltiplo, que será el común denominador.
2. Dividimos el común denominador entre los denominadores de las fracciones dadas y el resultado lo multiplicamos por el numerador correspondiente.

Operaciones con fracciones algebraicas

Suma y diferencia de fracciones algebraicas

Fracciones algebraicas con igual denominador

La suma de fracciones algebraicas con el mismo denominador es otra fracción algebraica con el mismo denominador y cuyo numerador es la suma de los numeradores.

Fracciones algebraicas con distinto denominador

En primer lugar se ponen las fracciones algebraica a común denominador, posteriormente se suman los numeradores.

Producto de fracciones algebraicas

El producto de dos fracciones algebraicas es otra fracción algebraica donde el numerador es el producto de los numeradores y el denominador es el producto de los denominadores.

Cociente de fracciones algebraicas

El cociente de dos fracciones algebraicas es otra fracción algebraica con numerador el producto del numerador de la primera por el denominador de la segunda, y con denominador el producto del denominador de la primera por el numerador de la segunda.

Practica

Ejercicios de polinomios

1. Indicar cuales de las siguientes expresiones son monomios. En caso afirmativo, indica su grado y coeficiente.

* $13x^3$
* $25x^{-3}$
* $33x + 1$
* $\sqrt{2}\,x$
* $-\frac{3}{4}x^4$
* $-\frac{3}{x^4}$
* $2\sqrt{x}$

2. Efectúa las siguientes operaciones con monomios:

* $2x^3 - 5x^3 =$
* $3x^4 - 2x^4 + 7x^4 =$
* $(2x^3) \cdot (5x^3) =$
* $(2x^3\, y^2) \cdot (5x^3\, y\, z^2) =$
* $(12x^3) \cdot (4x) =$
* $(18x^6\, y^2\, z^5) \cdot (6x^3\, y\, z^2) =$
* $(2x^3\, y^2)^3 =$
* $(2\, x^3\, y^2 z^5)^5 =$
* $3x^3 - 5x^3 - 2x^3 =$
* $(12\, x^3\, y^5\, z^{4)}) : (3x^2\, y^2\, z^3) =$
* $\frac{12x^3y^5 + 18x^5y^7 - 48x^{12}y^6}{3x^2y^2} =$

3. Diga si las siguientes expresiones algebraicas son polinomios o no. En caso afirmativo, señala cuál es su grado y término independiente.

- $x^4 - 3x^5 + 2x^2 + 5$
- $\sqrt{x} + 7X^2 + 2$
- $1 - x^4$
- $\frac{2}{x^2} - x - 7$
- $x^3 + x^5 + x^2$
- $x - 2x^{-3} + 8$
- $x^3 - x - \frac{7}{2}$

4. Dados los polinomios:

- $P(x) = 4x^2 - 1$
- $Q(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 2$
- $R(x) = 6x^2 + x + 1$
- $S(x) = 1/2x^2 + 4$
- $T(x) = 3/2x^2 + 5$
- $U(x) = x^2 + 2$

Calcular:

$P(x) + Q(x)$

$P(x) - U(x)$

$P(x) + R(x)$

$2P(x) - R(x)$

$S(x) + R(x) + U(x)$

$S(x) - R(x) + U(x)$

5. Multiplicar:

- $(x^4 - 2x^2 + 2) \cdot (x^2 - 2x + 3) =$

* $(3x^2 - 5x) \cdot (2x^3 + 4x^2 - x + 2) =$

6. Calcular:

* $\left(x^2 - \frac{1}{2}x\right)^2 =$
* $(x + 2)^3$
* $(3x - 2)^3$
* $(2x + 5)^3$
* $(3x - 2) \cdot (3x + 2)$

7. Comprueba que los siguientes polinomios tienen como factores los que se indican:

* $(x^3 - 5x - 1)$ tiene por factor $(x - 3)$
* $(x^6 - 1)$ tiene por factor $(x + 1)$
* $(x^4 - 2x^3 + x^2 + x - 1)$ tiene por factor $(x - 1)$
* $(x^{10} - 1024)$ tiene por factor $(x + 2)$

8. Factorizar:

* $\frac{2}{5}x^5 - \frac{6}{5}x^4 + \frac{14}{15}x^2 =$
* $xy - 2x - 3y + 6 =$
* $25x^2 - 1 =$
* $36x^6 - 49 =$
* $x^2 - 2x + 1 =$
* $x^2 - 6x + 9 =$
* $x^2 - 20x + 100 =$
* $x^2 + 10x + 25 =$
* $x^2 + 14x + 49 =$
* $x^3 - 4x^2 + 4x =$
* $3x^7 - 27x =$
* $x^2 - 11x + 30$
* $3x^2 + 10x + 3$

* $2x^2 - x - 1$

9. Descomponer en factores y hallar las raíces de:

* $P(x) = 2x^3 - 7x^2 + 8x - 3$
* $x^3 - x^2 - 4$
* $x^3 + 3x^2 - 4x - 12$

10. Encontrar el valor de k para que al dividir $2x^2 - kx + 2$ por $(x - 2)$ dé de resto 4.
11. Determinar el valor de m para que $3x^2 + mx + 4$ admita $x = 1$ como una de sus raíces.
12. Hallar un polinomio de cuarto grado que sea divisible por $x^2 - 4$ y se anule para $x = 3$ y $x = 5$.
13. Calcular el valor de a para que el polinomio $x^3 - ax + 8$ tenga la raíz $x = -2$, y calcular las otras raíces.
14. Simplificar:

* $\frac{x^2 - 3x}{x^2 + 3x} =$
* $\frac{x^2 - 3x}{3 - x} =$
* $\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 7x + 12} =$
* $\frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - x - 2} =$

15. Resolver:

* $\frac{x + 2}{x^3 - 1} - \frac{1}{x - 1} =$
* $\frac{x + 2}{x^2 + 4x + 4} : \frac{x^2 - 4}{x^3 + 8} =$
* $\frac{9 - 6x + x^2}{9 - x^2} \cdot \frac{x^2 - 5x + 6}{3x^2 - 9x} =$
* $\left(x + \frac{x}{x - 1}\right) : \left(x - \frac{x}{x - 1}\right) =$

* $$\frac{x}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{x}}} =$$

A continuación algunos de los ejercicios anteriores resueltos:

Multiplicar:

1. $(x^4 - 2x^2 + 2) \cdot (x^2 - 2x + 3) =$

$= x^6 - 2x^5 + 3x^4 - 2x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 2x^2 - 4x + 6 =$

$= x^6 - 2x^5 - 2x^4 + 3x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 6x^2 - 4x + 6 =$

$= x^6 - 2x^5 + x^4 + 4x^3 - 4x^2 - 4x + 6$

2. $(3x^2 - 5x) \cdot (2x^3 + 4x^2 - x + 2) =$

$= 6x^5 + 12x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 10x^4 - 20x^3 + 5x^2 - 10x =$

$= 6x^5 + 12x^4 - 10x^4 - 3x^3 - 20x^3 + 6x^2 + 5x^2 - 10x =$

$= 6x^5 + 2x^4 - 23x^3 + 11x^2 - 10x$

7

Calcular:

1. $$\left(x^2 - \frac{1}{2}x\right)^2 =$$

$$= \left(x^2\right)^2 - 2 \cdot x^2 \cdot \frac{1}{2}x + \left(\frac{1}{2}x\right)^2 =$$

$$= x^4 - x^3 + \frac{1}{4}x^2$$

2. $(x + 2)^3 = x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot 2 + 3 \cdot x \cdot 2^2 + 2^3 =$

$= x^3 + 6x^2 + 12x + 8$

3. $(3x - 2)^3 = (3x)^3 - 3 \cdot (3x)^2 \cdot 2 + 3 \cdot 3x \cdot 2^2 - 2^3 =$

$= 27x^3 - 54x^2 + 36x - 8$

4. $(2x + 5)^3 = (2x)^3 + 3 \cdot (2x)^2 \cdot 5 + 3 \cdot 2x \cdot 5^2 + 5^3 =$

$= 8x^3 + 60x^2 + 150x + 125$

5. $(3x - 2) \cdot (3x + 2) =$

$= (3x)^2 - 2^2 =$

$= 9x^2 - 4$

Comprobar que los siguientes polinomios tienen como factores los que se indican:

1. $(x^3 - 5x - 1)$ tiene por factor $(x - 3)$

$(x^3 - 5x - 1)$ es divisible por $(x - 3)$ si y sólo si $P(x = 3) = 0$.

$P(3) = 3^3 - 5 \cdot 3 - 1 = 27 - 15 - 1 \neq 0$

$(x - 3)$ no es un factor.

2. $(x^6 - 1)$ tiene por factor $(x + 1)$

$(x^6 - 1)$ es divisible por $(x + 1)$ si y sólo si $P(x = -1) = 0$.

$P(-1) = (-1)^6 - 1 = 0$

$(x + 1)$ es un factor.

3. $(x^4 - 2x^3 + x^2 + x - 1)$ tiene por factor $(x - 1)$

$(x^4 - 2x^3 + x^2 + x - 1)$ es divisible por $(x - 1)$ si y sólo si $P(x = 1) = 0$.

$P(1) = 1^4 - 2 \cdot 1^3 + 1^2 + 1 - 1 = 1 - 2 + 1 + 1 - 1 = 0$

$(x - 1)$ es un factor.

4. $(x^{10} - 1024)$ tiene por factor $(x + 2)$

$(x^{10} - 1024)$ es divisible por $(x + 2)$ si y sólo si $P(x = -2) = 0$.

$P(-2) = (-2)^{10} - 1024 = 1024 - 1024 = 0$

$(x + 2)$ es un factor.

Factorizar

1. $\frac{2}{5}x^5 - \frac{6}{5}x^4 + \frac{14}{15}x^2 =$

$= \frac{2}{5}x^2\left(x^3 - 3x^2 + \frac{7}{3}\right)$

2. $xy - 2x - 3y + 6 =$

$= x \cdot (y - 2) - 3 \cdot (y - 2) =$

$= (x - 3) \cdot (y - 2)$

3. $25x^2 - 1=$

$= (5x + 1) \cdot (5x - 1)$

4. $36x^6 - 49 =$

$= (6x^3 + 7) \cdot (6x^3 - 7)$

5. $x^2 - 2x + 1 =$

$= (x - 1)^2$

6. $x^2 - 6x + 9 =$

$= (x - 3)^2$

7. $x^2 - 20x + 100 =$

$= (x - 10)^2$

8. $x^2 + 10x + 25 =$

$= (x + 5)^2$

9. $x^2 + 14x + 49 =$

$= (x + 7)^2$

10. $x^3 - 4x^2 + 4x =$

$= x \cdot (x^2 - 4x + 4) =$

$= x \cdot (x - 2)^2$

11. $3x^7 - 27x =$

$= 3x \cdot (x^6 - 9) =$

$= 3x \cdot (x^3 + 3) \cdot (x^3 - 3)$

12. $x^2 - 11x + 30$

$x^2 - 11x + 30 = 0$

$$x = \frac{11 \pm \sqrt{11^2 - 4 \cdot 30}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{121 - 120}}{2} = \frac{11 \pm 1}{2} = \begin{cases} \nearrow x_1 = \dfrac{12}{2} = 6 \\ \searrow x_2 = \dfrac{10}{2} = 5 \end{cases}$$

$x^2 - 11x + 30 = (x - 6) \cdot (x - 5)$

13. $3x^2 + 10x + 3$

$3x^2 + 10x + 3 = 0$

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3}}{6} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 36}}{6} = \frac{10 \pm \sqrt{64}}{6} = \frac{10 \pm 8}{6} = \begin{cases} \nearrow x_1 = \dfrac{18}{6} = 3 \\ \searrow x_2 = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

$3x^2 + 10x + 3 = 3\,(x - 3) \cdot (x - 1/3)$

14. $2x^2 - x - 1$

$2x^2 - x - 1 = 0$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 2}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} = \begin{cases} \nearrow x_1 = \frac{4}{4} = 1 \\ \searrow x_2 = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$2x^2 - x - 1 = 2\,(x - 1) \cdot (x + 1/2)$

Simplificar:

1. $$\frac{x^2 - 3x}{x^2 + 3x} =$$

$$= \frac{x \cdot (x - 3)}{x \cdot (x + 3)} =$$

$$= \frac{(x - 3)}{(x + 3)}$$

2. $$\frac{x^2 - 3x}{3 - x} =$$

$$= \frac{x\,(x - 3)}{3 - x} = \frac{-x\,(x - 3)}{-3 + x} = -x$$

$$\frac{x^2 + x - 2}{x^3 - x^2 - x + 1} =$$

$$= \frac{(x - 1) \cdot (x + 2)}{(x - 1) \cdot (x^2 - 1)} =$$

$$= \frac{(x + 2)}{(x^2 - 1)}$$

3. $\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 7x + 12} =$

$$\frac{(x-2)\cdot(x-3)}{(x-3)\cdot(x-4)} =$$

$$= \frac{(x-2)}{(x-4)}$$

4. $\frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - x - 2} =$

$$\frac{(x+1)\cdot(x-3)}{(x-2)\cdot(x+1)} =$$

$$= \frac{(x-3)}{(x-2)}$$