Universidad de Costa Rica

TC – Trabajo Comunal Universitario

Guía y práctica para la prueba de Matemáticas de Bachillerato de Educación Diversificada a Distancia para el Programa de Educación Abierta de la UCR

Por:

SEBASTIÁN RAMÍREZ SOLANO

Ciudad Universitaria Rodrigo Facio

Octubre del 2012

ÍNDICE GENERAL

1. CAPÍTULO 1: INTRODUCCIÓN..1

1.1 Objetivos..1

1.1.1 Objetivo general 1

1.1.2 Objetivos específicos 1

1.2 Metodología 1

2 CAPÍTULO 2: PROBLEMAS Y GUÍA DE TRIGONOMETRÍA, FUNCIONES Y ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS..........................4

2.1 Selección Única 4

2.1 Desarrollo 67

3. CAPÍTULO 4: CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES......72

3.1 Conclusiones 72

3.2 Recomendaciones 74

BIBLIOGRAFÍA...76

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 2.1 Círculo trigonométrico 8

Figura 2.2 Característica de una función lineal 13

Figura 2.3 Distribución en cuadrantes de dos ejes totalmente independientes 19

Figura 2.4 Función seno 22

Figura 2.5 Función coseno 22

Figura 2.6 Función tangente 32

Figura 2.7 Función del Problema 2.1.18 41

Figura 2.8 Función arcoseno 59

Figura 2.9 Función arcocoseno 59

Figura 2.10 Función arcotangente 60

Figura 2.11 Función Problema 2.2.2 69

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 2.1 Preimágenes e imágenes básicas de las funicones seno y coseno 26

NOMENCLATURA

Sen(x): Función Trigonométrica seno.

Cos(x): Función Trigonométrica coseno.

Tan(x): Función Trigonométrica tangente.

Csc(x): Función Trigonométrica cosecante.

Sec(x): Función Trigonométrica secante.

Cot(x): Función Trigonométrica cotangente.

Arcsen(x): Función Trigonométrica arcoseno.

Arccos(x): Función Trigonométrica arcocoseno.

Arctan(x): Función Trigonométrica arcotangente.

Hip: Lado de mayor longitud de un triángulo rectángulo.

Cat1,2: Catetos, lados de menor longitud de un triángulo rectángulo.

X: Variable independiente predominante.

Y: Variable dependiente predominante.

$\mathbb{R}$: Conjunto de los números reales.

$\mathbb{Z}$: Conjunto de los números enteros.

∞: Cantidad de valor absoluto infinito (indefinido).

RESUMEN

Este trabajo se realizó con el fin de poder ser un aporte apreciable en las pretensiones de aprender trigonometría, funciones trigonométricas y ecuaciones trigonométricas, a nivel de secundaria y a nivel del curso MA-0125, con fines autodidácticos.

Se hizo uso exhaustivo de ecuaciones, se emplearon imágenes cada vez que fuera considerado un recurso que facilitara el entendimiento del autodidacta, y se hizo empleo de tablas cuando era necesario manejar una serie de datos que fuera recomendables manejarlos no dispersos sino más bien en un solo lugar.

El documento fue redactado por el autor sin el uso de tan siquiera una calculadora de teléfono celular, esto con varios fines, uno de ellos es mostrarle al usuario que para resolver problemas de este alcance y de esta naturaleza no requiere el uso de una máquina calculadora. El autor recomienda al usuario no hacer uso de la calculadora, esto con varios fines, uno de ellos es familiarizar al usuario con las cantidades y cálculos usuales en el área de la trigonometría, rama de las matemáticas destinada a la medición de ángulos y lados de un triángulo, esto lo comprobará el usuario a lo largo de este documento.

1. CAPÍTULO 1: Introducción

1.1 Objetivos

1.1.1 Objetivo general

Brindar una herramienta de apreciable utilidad autodidáctica, en los temas de funciones y ecuaciones trigonométricas.

1.1.2 Objetivos específicos

Brindar una herramienta que exponga la información necesaria para hacerse de conceptos sólidos en los temas expuestos en este trabajo, de una manera explícitamente enfocada en la exposición clara y detallada de todos los conceptos aquí tratados y sin hacer uso de ningún tipo de máquina calculadora.

1.2 Metodología

El desarrollo de este documento está totalmente apegado al IV Examen Parcial del año 2011, del Proyecto MATEM de la Universidad de Costa Rica, específicamente del curso MA – 0125, Matemática Elemental. El presente trabajo presenta la solución completa de dicho examen, el cual tiene como enfoque dos de los temas (funciones y ecuaciones trigonométricas) que implican una gran cantidad de preguntas de una evaluación de Bachillerato en Educación Secundaria (también Bachillerato por Madurez).

La solución de cada uno de los problemas se realiza de una manera, a criterio del autor, considerablemente explícita, aplicando soporte gráfico las veces que sea necesario y cuando realmente sea un aporte de consideración. Para dicha tarea se hizo empleó del programa computacional (software) MATLAB™ 2011.

Cada una de las soluciones se hizo mostrando, deliberadamente, cada detalle, implícito y explícito, de la solución, haciendo mención a figuras, tablas y ecuaciones cuantas veces fuera necesario para nunca perder el sentido de orientación.

No en pocos problemas, queda reflejada la intención del autor de enfocarse en la utilidad práctica de los temas expuestos en este documento, con el fin de ser colaborador, al menos, de generar una perspectiva, en la usuaria o usuario, de que las Matemáticas son una gran herramienta para modelado de una gran cantidad de eventos usuales de la vida cotidiana, y con el modelado la anticipación y con la anticipación un planteamiento adecuado para estar uno o más pasos delante de los eventos porvenir implicados en el análisis en cuestión, eso y poder además hacer ajustes mediante manipulación al modelo matemático que se está tratando. Es decir, se hace mención a la gran utilidad de adiestrarse en las Matemáticas con el fin de poderlas aplicar en la solución de gran cantidad, a lo poco, de situaciones de la vida cotidiana, que muchas veces pasan desapercibidas.

2 CAPÍTULO 2: Problemas y guía de trigonometría, funciones y ecuaciones trigonométricas.

Este capítulo se divide en dos secciones, una sección de respuesta breve, y otra sección de desarrollo. Aunque, como se dará cuenta el usuario de este documento, no hay diferencia entre las dos secciones, dado que cada uno de los problemas se resuelve haciendo empleo de todo el desarrollo matemático que sea requerido.

2.1 RESPUESTA ÚNICA.

2.1.1 PROBLEMA 2.1.1.

¿Cuál de los siguientes puntos no pertenece a la circunferencia trigonométrica?:

a) $[\frac{12}{13},\frac{-17}{13}]$

b) $[\frac{119}{169},\frac{43}{169}]$

c) $[\frac{14}{169},\frac{-17}{169}]$

d) $[\frac{-12}{13},\frac{5}{13}]$

SOLUCIÓN.

La opción d) es la correcta, pues por definición, el círculo trigonométrico es un círculo de radio unitario (radio de valor 1), esto con el propósito de tener un círculo elemental a partir del cual todos los demás círculos se puedan determinar a partir de este. De esta forma, la prueba que se debe hacer para determinar si un par de lados forman parte del círculo trigonométrico es recordando los conceptos fundamentales de la geometría (la construcción) de un triángulo rectángulo, el cual se analiza con todo detalle hasta el punto de dar nombres específicos a los lados que lo conforman, dos de ellos, los menores en medida son los catetos, y el mayor de los tres lados es llamado hipotenusa del triángulo rectángulo. Después se debe entonces recordar que un círculo trigonométrico requiere de dos ejes independientes (ninguno puede formarse a partir de una combinación de ejes llamados independientes) los cuales van a prestar pares de puntos para ir formando la circunferencia del círculo en cuestión, ambos ejes además se intersecan (se cortan, se unen) en un punto llamado eje del par de ejes coordenados (coordenados pues dan la ubicación exacta de cualquier punto contenido en el eje en cuestión). Ahora bien, si se tienen dos ejes coordenados, donde a cualquier de los ejes se le puede poner el nombre que se quiera, aunque habitualmente se utilizan nombres como posición, tiempo, temperatura, etc, y se ubican un par de puntos, un punto en el eje horizontal, y otro punto en el eje vertical (como ambos ejes son independientes, la separación angular entre estos ejes debe ser siempre de 90˚), entonces, se puede ver que si se une con una línea recta el origen con el punto del eje horizontal se tiene una medida, una línea recta, si se hace lo mismo con el vértice y el punto del eje vertical, entonces se tienen dos medidas, dos líneas rectas, ahora, si se imagina que la medida vertical se desliza hasta llegar al punto del eje horizontal en el que termina la medida horizontal entonces se tendrá un par de lados que forma un ángulo recto (90˚) entre ellos, y si luego de esto se une con una línea recta al eje y al punto en donde termina la medida del lado vertical entonces se tendrá un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es la recta que une al eje del sistema de coordenadas (se conoce como sistema de coordenadas a dos o más ejes independientes que se intersecan en un solo punto, y ese punto de intersección es el mismo para todos los ejes independientes en cuestión). Ya que se tiene un triángulo rectángulo, todas las ecuaciones establecidas para este tipo de triángulo pueden ser utilizadas para resolver problemas de la vida cotidiana que lo involucren (ejemplos de la vida cotidiana pueden ser desde determinar posición, velocidad y aceleración desde un simple compás para medición de ángulos, determinar posición, velocidad y aceleración de un cohete que se mueve en una sola dirección desde la perspectiva de un punto fijo, hasta incluso para poder decidir cuánto debe invertir una industria para evitar sanciones de miles de dólares por despilfarro en el consumo de energía eléctrica).

Ahora bien, con todo lo anterior claro, lo que se debe hacer es aplicarlo al concepto del círculo trigonométrico, y eso ya está hecho, es un círculo formado en un sistema coordenado de dos ejes independientes, al ser dos ejes independientes lo que se va a poder hacer es representar figuras planas, como el círculo, donde este círculo en específico es de radio unitario, es decir la medida que hay desde el centro del círculo, que coincide con el eje de las coordenadas, y cualquier punto de la circunferencia, es de medida 1, donde las unidades quedarán a cargo del que esté resolviendo o estudiando el problema en cuestión.

Entonces, si se conoce un par de puntos, un punto por cada eje, entonces se puede trazar un lado desde el eje hasta el punto del eje horizontal con el que se cuenta, luego hacer lo mismo para el eje vertical, luego deslizar esa medida de manera horizontal hasta llegar al final de la medida horizontal, y después cerrar el triángulo uniendo el vértice con el punto donde termina la medición vertical ya deslizada horizontalmente y luego aplicar los conocimientos en mediciones de triángulos rectángulos para determinar la solución a algún problema en particular. En este caso en específico se debe aplicar además de todo lo ya explicado, el teorema de Pitágoras, que dice que el cuadrado de la hipotenusa es igual al cuadrado de un cateto más el cuadrado del otro cateto, así se tiene lo dicho en la ecuación 2.1.1-1.

$$h^2 = {c_1}^2 + {c_2}^2 \qquad (2.1.1\text{-}1)$$

De la ecuación 2.1-1 se concluye lo indicado en la ecuación 2.1.1-2.

$$h = \sqrt{{c_1}^2 + {c_2}^2} \qquad (2.1.1\text{-}2)$$

Si se aplica la ecuación 2.1.1-2 a las cuatro opciones ofrecidas se podrá concluir que la solución es la opción d), pues se obtiene que la hipotenusa, que es igual al radio, que es igual a 1 es un círculo trigonométrico, es igual a lo que se obtiene al calcular la hipotenusa para este par de lados dados. Este cálculo lo muestra la ecuación 2.1.1-3.

$$h = \sqrt{(\frac{-12}{13})^2 + (\frac{5}{13})^2} = 1 \qquad (2.1.1\text{-}3)$$

2.1.2 PROBLEMA 2.1.2.

En la figura 2.1, la longitud del arco mayor es:

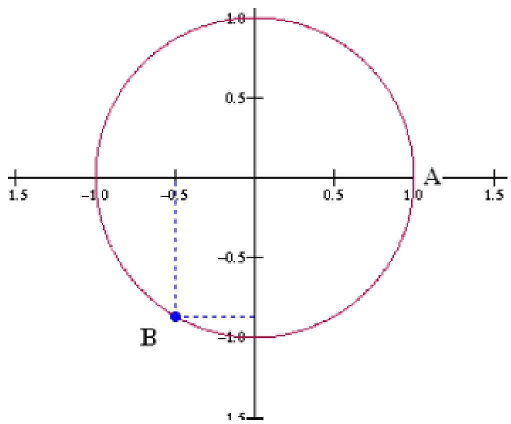

Figura 2.1: Círculo trigonométrico. [MA – 0125, IV parcial Abril 2011].

a) $\frac{7\pi}{6}$

b) $\frac{4\pi}{3}$

c) $\frac{2\pi}{3}$

d) $\frac{5\pi}{6}$

SOLUCIÓN.

Se conoce que el perímetro de un círculo de radio r está determinado como lo dicta la ecuación 2.1.2-1., así como el área de un círculo de radio r está determinada como lo dicta la ecuación 2.1.2-2.

$$P = 2\pi r \qquad (2.1.2\text{-}1)$$

$$A = \pi r^2 \qquad (2.1.2\text{-}2)$$

Si la situación es un círculo de radio 1, como puede apreciarse en la figura 2.1, entonces, se puede concluir que el perímetro de un círculo de radio 1 es $2\pi\ um$, mientras que su área es $\pi\ um^2$, donde um son unidades métricas (unidades de medición, por ejemplo, pueden ser centímetros o metros) y um^2 son unidades métricas multiplicado por unidades métricas, esto puede ser por ejemplo cm^2 o cm^2.

Si se toma este concepto y se aplica para pedazos de círculos, entonces lo que se debe hacer es entender lo dicho en 2.1.2-1 y 2.1.2-2. Lo primero es preguntarse qué es el perímetro, el perímetro es una medición de la cantidad de espacio físico ocupado en una dimensión, donde las tres dimensiones físicas son el largo, el alto y el ancho. Entonces, si el radio es unitario, el perímetro es 2π, esto es la cantidad de radianes que contiene un círculo completo, es solo una medición equivalente a los 360° que recorre el círculo solo que los radianes es una medición para efectos prácticos adimensional, puede multiplicarse una constante en radianes por una constante en metros, y el resultado será en metros, esto revela su naturaleza adimensional, como lo muestra el obtener el perímetro en $u.m$ y no en radianes, adimensional quiere decir que las unidades en las que se mide no son relevantes o que solamente es un valor fijo, constante, como por ejemplo, el número 3, es solo el número 3, sin metros, ni litros de sufijo. Ahora bien, se puede demostrar matemáticamente mediante una técnica llamada integración que el perímetro de un segmento de círculo es la cantidad de radianes que abarca el arco de círculo en cuestión multiplicado por el radio del semicírculo, donde se define arco de un círculo como un segmento circular delimitado por dos radios subtendidos por ángulos distintos. Se puede además concluir que según lo dicta la lógica y la inspección y además verificado por una técnica llamada integración doble, aplicando coordenadas polares, se puede ver que el área de un segmento circular es el producto (multiplicación) de la cantidad de radianes abarcados por el segmento de círculo divididos entre dos, por el radio al cuadrado (radio * radio) del arco en cuestión. Ambas conclusiones se muestran en las ecuaciones 2.1.2-3 y 2.1.2-4.

$$P_{arco} = radianes_{abarcados} r \tag{2.1.2-3}$$

$$A_{arco} = radianes_{abarcados} r^2 \tag{2.1.2-4}$$

Así las cosas, lo que se debe hacer es hallar el ángulo que abarca el arco mayor AB, concluir de la figura 2.1 que el radio es unitario, y luego aplicar las ecuaciones 2.1.2-3 y 2.1.2-4. Para hallar el ángulo que abarca dicho círculo se debe primero hallar el ángulo que hay entre el radio que forman la suma de las medidas que forman los puntos en el eje horizontal y en el eje vertical, para ello se utiliza las identidades trigonométricas, a saber seno, coseno y tangente, y conocer que su operación inversa, así como la suma tiene a la resta y la multiplicación a la división, las tres operaciones trigonométricas antes mencionadas tienen su operación que las contrarresta, y estas son, arco-seno, arco-coseno y arco-tangente. Además se repasará brevemente estas tres operaciones fundamentales a través de las ecuaciones 2.1.2-5, 2.1.2-6 y 2.1.2-7.

$$seno(\theta) = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa} \tag{2.1.2-5}$$

$$coseno(\theta) = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa} \tag{2.1.2-6}$$

$$tangente(\theta) = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente} \tag{2.1.2-7}$$

El ángulo que aparece entre paréntesis en cada expresión recibe el nombre de argumento. En un triángulo rectángulo, como se mencionó anteriormente, se tiene una hipotenusa y dos catetos, ambos catetos tienen un nombre específico, este depende del ángulo agudo (menor a 90˚ que se esté considerando), así, se llama cateto adyacente al lado del triángulo que junto a la hipotenusa subtienden (tienen en medio de sí) al ángulo agudo en cuestión, y se llama cateto opuesto, refiriéndose al mismo ángulo, al lado que es ajeno en lo absoluto al ángulo agudo en cuestión.

Entonces, se conoce que la hipotenusa es 1, pues es el radio del círculo en cuestión, y además se conoce puede verse en el lado conocido del triángulo, que viene siendo el cateto que se ubica horizontalmente, que este cateto y la hipotenusa subtienden un ángulo, dicho ángulo se puede hallar mediante la razón (fracción, división, cociente, proporción) trigonométrica coseno, donde el ángulo θ viene a ser el ángulo que subtienden el cateto adyacente y la hipotenusa, el cálculo de ese ángulo se muestra en la ecuación 2.1.2-8.

$$\theta = \arccos\left(\frac{0.5}{1}\right) = 60° \tag{2.1.2-8}$$

El ángulo θ en unidades de grados puede ser convertido a unidades de radianes muy sencillamente, nada más basta con saber que un círculo de radio unitario (radio = 1 $u.m$) la longitud total del círculo, en una dimensión es de 2π $u.m$ (para esto solo hay que imaginarse que se pasa una tijera al círculo, solo una vez, y que se toma uno de los lados y se estira en una línea recta, puede ser de derecha a izquierda (dimensión de largo), de atrás para adelante (dimensión de ancho), o de arriba abajo (dimensión de alto), y que luego se mide con un instrumento de medición apropiado, por ejemplo, una regla, o un metro estirable, y de esa forma se halla la cantidad de espacio unidimensional que ocupa el círculo, es decir, se halla su perímetro). Luego se debe saber que en esa medida de 2π $u.m$ se recorrieron 360˚, entonces, ya que el círculo presenta un comportamiento idéntico a lo largo de todo su recorrido, entonces, es posible predecir su comportamiento en cualquier instante, con solo conocer cómo se comporta en un punto, y ese punto siempre se va a conocer, es el final donde para una longitud 2π $u.m$ abarcó 360˚, entonces, puede trazarse una gráfica de una función lineal (una línea recta siempre creciente, o siempre decreciente, o una de cada una por ratos), y entonces, como se conoce que el criterio (forma matemática) de una función lineal es como lo indica la ecuación 2.1.2-9, se tendrá entonces con un eje horizontal que puede ser en grados, y un eje vertical en radianes, o bien, invertir los ejes, eso queda como le parezca más cómodo al usuario, entonces se conoce de la condición final la pendiente m, pues se puede despejar, ya que la intersección con el eje de las ordenadas (eje vertical, eje y) es 0, ya que a los 0 radianes corresponde un recorrido de

0°, entonces, para la condición en la que se conocen o los radianes en cuestión o los grados recorridos, es posible despejar de la ecuación 9 el parámetro (símbolo) de interés, ya sea x o y. Esto popularmente, y tal vez sin conocerse el fundamento sólido en el que subyace es conocido como regla de tres, y su manera rápida de aplicación se muestra en la figura 2.2.

$$y = mx + b \tag{2.1.2-9}$$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \tag{2.1.2-10}$$

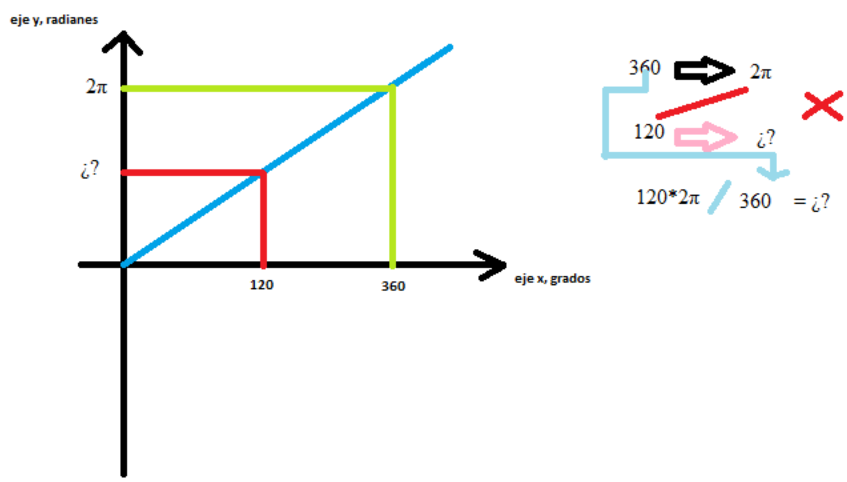

Figura 2.2: Característica de una función lineal.

Con lo anterior, se puede ver que si el ángulo es de 60° su equivalente en radianes es de $\pi/_3$ radianes, luego por inspección, el arco mayor AB subtiende no solo este ángulo de 60° sino también una media circunferencia que sería de 180°, y aplicando lo recién visto serían π radianes, entonces la cantidad de radianes recorridos por el segmento de circunferencia de radio unitario sería la suma de ambos cálculos, lo cual da $4\pi/_3$, que sería la opción b).

2.1.3 PROBLEMA 2.1.3.

Considerar el arco OT en la circunferencia trigonométrica, subtendido desde el par ordenado O(1,0) hasta el par ordenado T(x,y). Si la medida de dicho arco es $\frac{7\pi}{6}$ radianes, entonces, cuál de las siguientes opciones corresponde al par ordenado T(x,y).

a) $[\frac{-1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}]$

b) $[\frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}]$

c) $[-1, \sqrt{3}]$

d) $[-\sqrt{3}, 1]$

SOLUCIÓN.

Para este problema, al igual que en todos, solo se debe entender por completo lo ofrecido en el enunciado, y pensar una o varias maneras de determinar la información solicitada. Así, se sabe del enunciado que se debe hallar el par ordenado sabiendo que el ángulo que subtiende el arco OT es de 210˚ (aplicar el concepto de función lineal, aplicar linealidad). Después algo que nunca puede ser obviado, ni mucho menos despreciado, es el conocer la referencia del entorno en el que se encuentra trabajando, es decir, el colón es una moneda inferior en valor respecto al dólar, sin embargo, si se compara el colón con alguna moneda de alguna otra República con una mayor deuda externa que la de Costa Rica, muy probablemente la moneda de Costa Rica sea superior en valor adquisitivo (cantidad de bienes que se pueden adquirir) con respecto a la moneda del país con mayor deuda externa. Prestando atención a lo anterior, la referencia con la que se comparó la moneda de Costa Rica (el colón) cambio en ambos casos, y eso conllevó a un cambio en el resultado, el primero arrojaba que era una moneda de inferior valor adquisitivo y el segundo arrojó que era una moneda con mayor valor adquisitivo, se concluye de lo anterior que el resultado que se va a obtener, muchísimas veces va a venir determinado por la referencia con la que se trabaje. Lo anterior aplica en su totalidad para las matemáticas, y la medición de ángulos no es la excepción, en medición de ángulos, la referencia de medición es el rayo que está a la derecha del eje inclusive, es decir es una semirecta que incluye al eje, y de ahí, cualquier movimiento circular en contra de las manecillas del reloj dará como resultado un ángulo positivo, mientras que un movimiento circular a favor de las manecillas del reloj dará como resultado un ángulo negativo. Con lo anterior queda cubierto el tema de referencia angular.

Así, si se tiene un ángulo de +210˚, quiere decir que se han recorrido 210˚ en sentido contrario al de las manecillas del reloj, y como el primer par ordenado O(1,0) indica que la medición empezó desde el primer cuadrante (el sistema coordenado de dos ejes se parte en cuatro cuadrantes, el primero es el de la derecha arriba, el segundo es el de la izquierda arriba, el tercero es el de la izquierda abajo y el cuarto es el de la derecha abajo), entonces se tiene que se recorren 180˚ y 30˚ del tercer cuadrante, luego se aplica la razón trigonométrica coseno para determinar la medida del cateto opuesto respecto al ángulo de 30˚ medido entre el rayo izquierdo y el radio del círculo trigonométrico, así se obtiene que la medida es $\sqrt{3}/2$, sin embargo, debe tenerse el cuidado de que en el tercer cuadrante, tanto los valores del eje de las ordenadas como los del eje de las abscisas son negativos, por lo que este valor recién obtenido se le debe agregar un signo negativo. Luego, para obtener la medida del cateto opuesto se aplica la razón seno para así obtener que este cateto mide $1/2$, y luego se aplica el hecho de que este valor, dada la circunstancia, debe ser negativo.

Por lo que la opción correcta es la opción b).

2.1.4 PROBLEMA 2.1.4.

Al número real k le corresponde, en la circunferencia trigonométrica, el par ordenado de coordenadas ($\frac{-3}{4}$,$\frac{4}{5}$), entonces, cot(k) es igual a:

a) $\frac{-4}{3}$

b) $\frac{-3}{4}$

c) $\frac{-5}{3}$

d) $\frac{5}{4}$

SOLUCIÓN

Solamente se extrae del enunciado que se encuentra en el segundo cuadrante, y después se aplica la razón trigonométrica arco-tangente para hallar el ángulo que se encuentra, y en esta parte hay que tener mucho cuidado, entre el eje horizontal izquierdo y el radio del círculo trigonométrico, así, al aplicar el arco-tangente, el cateto adyacente sería el punto del par ordenada que corresponde al eje de las abscisas, mientras que el cateto opuesto sería el cateto que determina el punto del eje de las ordenadas, así, el ángulo k es aproximadamente 53.13, y después al aplicar cotangente (se define cosecante, secante y cotangente, al inverso, no operación inversa sino inverso, de seno, coseno y tangente, respectivamente) a ese ángulo se obtiene que el resultado es $\frac{-3}{4}$. Por lo que la opción correcta es b).

2.1.5 PROBLEMA 2.1.5.

Al número real $\frac{49\pi}{6}$, le corresponde en la circunferencia trigonométrica, el mismo punto que al número:

a) $\frac{149\pi}{6}$

b) $\frac{-37\pi}{6}$

c) $\frac{61\pi}{6}$

d) $\frac{-97\pi}{6}$

SOLUCIÓN.

Para este problema solamente debe darse cuenta que en un círculo trigonométrico o no trigonométrico, de excederse los 360˚ que lo forman, lo único que se hará es recorrer sobre el mismo contorno, por lo que, por ejemplo, si se tienen 10 mil colones, y se busca saber cuántas veces se excedió los 2 mil colones, solamente se toma la cantidad en cuestión, y se divide entre la cantidad que se quiere ver cuántas veces fue excedida, de esta forma se tiene que excedió en 5 veces los 2 mil colones. De la misma manera se toma los $\frac{49\pi}{6}$ y se dividen entre 2π para ver cuántas vueltas se le dio al círculo en cuestión, luego al inspeccionar el cociente y tomar el número entero a la izquierda del separador de decimales (más conocido como la "coma") multiplicarlo por 2π se tiene la cantidad de radianes que conforman la totalidad de vueltas completas, después se toma el número real a la derecha de la coma y se multiplica por 2π (con el fin de cancelar la primera división por 2π que se efectuó), con estos es que se ve en qué posición se ha caído en el círculo trigonométrico luego de las 4 vueltas recorridas. Si se convierte a grados la información obtenida de realizar los cálculos anteriormente descritos se obtiene que 30° es la cantidad de grados "extras" recorridos. Ahora, de las cuatro posibles soluciones, lo único que se debe hacer es aplicarle a cada una el mismo procedimiento para así obtener la solución al problema. De lo anterior se obtiene que $\frac{61\pi}{6}$ da exactamente el mismo recorrido y corresponde al mismo punto que $\frac{49\pi}{6}$, por lo que la opción correcta es c).

2.1.6 PROBLEMA 2.1.6

Si (m,n) es el punto de la circunferencia trigonométrica asociado al número real x y $m*n < 0$, con certeza se cumple que:

a) $\text{sen}(x) * \cos(x) > 0$

b) $\tan(x) < 0$

c) $\sec(x) > 0$

d) $\csc(x) < 0$

SOLUCIÓN

Con certeza la respuesta a) es la correcta, pues, si se analiza detenidamente, el punto de la circunferencia trigonométrica x está conformado por el par ordenado (solo es un par de números, uno de cada eje o recta) (m,n), la única forma en que m*n sea negativa es que uno de los dos, no importa cuál, sea positivo y el otro negativo (recordar -*- = +). Así las cosas, se estaría ubicado en el segundo o cuarto cuadrante, pues como lo indica la figura 2.3, solo en esos cuadrantes hay un miembro positivo y otro negativo. Además, a partir de la misma figura se puede ver que, para esos cuadrantes, tanto seno como coseno son positivos, por lo tanto, el producto (multiplicación) de ambos es siempre, sin discusión, positivo, por lo tanto, no hay que molestarse en analizar las tres otras opciones.

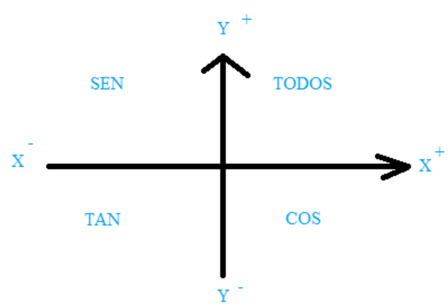

Figura 2.3: Distribución en cuadrantes de dos ejes totalmente independientes.

2.1.7 PROBLEMA 2.1.7

Si el punto de la circunferencia trigonométrica asociado a un número real β se ubica en el III cuadrante, ¿cuál de las siguientes proposiciones es imposible que suceda?:

a) $\sec(\beta) * \csc(\beta) < 0$

b) $1 + \operatorname{sen}(\beta) < 1$

c) $\cot(\beta) > 0$

d) $\tan(\beta) + 1 > 0$

SOLUCIÓN

Sin necesidad de analizar las otras tres opciones de abajo, con certeza la opción a) es imposible que nunca suceda, pues, en el III cuadrante, tal como lo indica la figura 2.3, tanto seno como coseno son negativas, es decir, el producto de seno con coseno, para un ángulo en ese cuadrante, dará como resultado un número positivo (recordad: - * - = +).

2.1.8 PROBLEMA 2.1.8

La expresión $\operatorname{sen}(98\pi) + \cos(13\pi) + \cos(-11\pi/2)$ es igual a:

a) 2

b) 1

c) 0

d) -1

SOLUCIÓN

Si se analiza la función trigonométrica seno y coseno, se verá que estas son funciones periódicas, es decir que siempre se repiten (como por ejemplo, los 12 meses del año, siempre se repiten, o los 7 días que componen la semana, si bien es cierto, todos los días tienen algo distinto, los días que conforman la semana se repiten, al menos en nombre una vez cada siete días, es decir, la semana es una función con periodo de 7 días, y el año una función periódica con periodo de 12 meses), y en este caso, la función seno y coseno se repiten cada 360˚ o más exactamente, cada 2π radianes, como lo muestra la figura 3.4. La función coseno, e la función seno, solo que se debe notar que está desplazada un poquito hacia la derecha, ese poquito son 90˚ o bien $\pi/2$ radianes, como lo indica la figura 3.5. Así las cosas, poniendo un poco de cuidado, se puede dar cuenta que, como la función se repite cada 2π radianes, entonces, para los múltiplos pares de π, al función volverá a tener el mismo valor que tenía cuando se comenzó a contar el paso de los 2π recién contados, es decir, si se empezó a contar en el inicio de la función en el origen de los dos ejes, y pasaron ya 2π en el eje horizontal, entonces la función vuelve a valer lo que valía al inicio del conteo, esto es, 0. Así, si han pasado 98 π desde el inicio del conteo en el origen, entonces se tiene un múltiplo par, por lo tanto vale 0. Para coseno es igual el análisis, solo que en el origen vale 1, y se repite para cada 2π y para múltiplos pares de π a partir del instante de conteo. En el caso de ser múltiplos impares de π la función va a valer -1, puede verificarse esto en la figura 3.5, para π, 3π, 5π, etc, la función siempre vale -1. Además, si se pone atención, la función coseno vale 0 para cualquier múltiplo (llámese múltiplo a cualquier multiplicador que sea entero) impar de $\pi/2$. Por lo tanto, los miembros de más a los lados de la expresión dada son 0, y el del medio es coseno de un múltiplo impar de π, entonces ese término vale -1, de paso ese componente es el único que es distinto de cero, por lo tanto, la respuesta correcta es la opción d), es decir, -1.

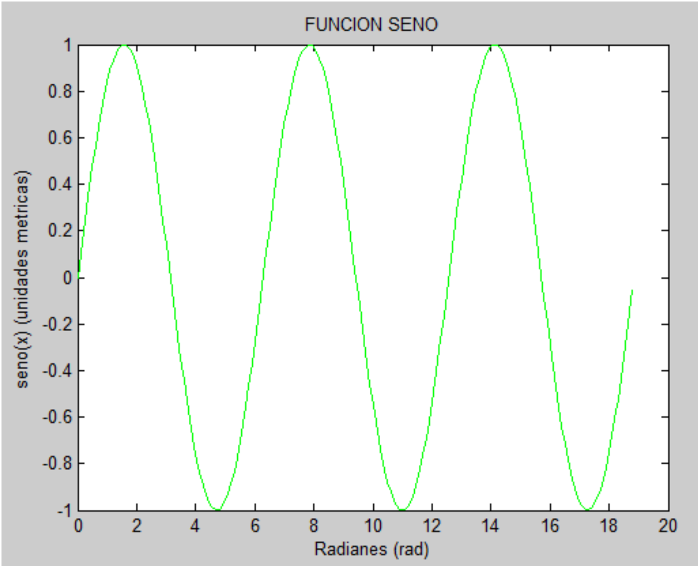

Figura 3.4: Función seno.

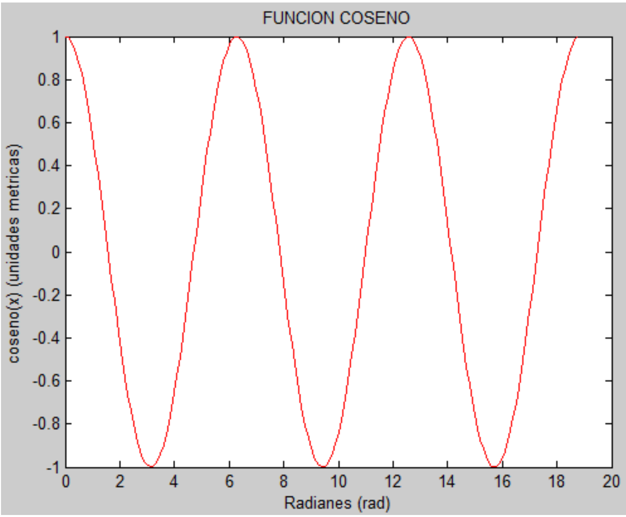

Figura 3.5: Función coseno.

2.1.9 PROBLEMA 2.1.9

El valor de la expresión $3 * (\cos(\frac{\pi}{4}))^2 - (\cos(\frac{28\pi}{6}))^2$ es:

a) 0

b) 2

c) $\frac{5}{4}$

d) $\frac{3}{4}$

SOLUCIÓN

Para resolver este problema, sin el uso de calculadora, solo debe tomarse en cuenta, y hacer un pequeño esfuerzo por recordar la tabla 2.1, en donde se muestran los valores más frecuentes para funciones seno y coseno, obtener los valores para tangente y el resto de funciones trigonométricas es cuestión de hacer divisiones muy cortas.

Tabla 2.1: Preimágenes e Imágenes básicas de funciones seno y coseno.

FUNCIÓN	VALOR				
	x = 0	x = π/6	x = π/4	x = π/3	x = π/2
seno (x)	0	1 /2	$\sqrt{2}$ /2	$\sqrt{3}$ /2	1
coseno (x)	1	$\sqrt{3}$ /2	$\sqrt{2}$ /2	1 /2	0

Así las cosas, solamente debe verse si el argumento (lo que está en el paréntesis dentro de las expresiones trigonométricas, como por ejemplo seno y coseno) es un múltiplo de los valores de x dados en la tabla 3.1 y ver en que cuadrante caerá la expresión aplicando el múltiplo respectivo al problema en cuestión y el problema se resolverá sin calculadora, pues debe recordarse que las expresiones trigonométricas tienen amplitud (valor máximo) unitario (es decir, su máximo valor es 1). Por ejemplo, para la primera expresión de la que hay que ocuparse, el argumento es múltiplo de $\pi/4$, y el múltiplo es, así que se tendría que vale $\sqrt{2}$ /2, sin embargo, al elevarlo al cuadrado se tiene 1/2. Para la segunda expresión se tiene que es un múltiplo de 2 y de 4 de $\pi/6$, sin embargo, haciendo al haber 4 cuadrantes, y ser 28 el múltiplo en cuestión, entonces se está cayendo en el IV cuadrante, y ya se conoce cuánto vale la expresión coseno para ese ángulo, la posición en los cuadrantes solo determina el signo de la expresión, debe recordarse que, a la verdad, solamente se están analizando triángulos, y las medidas de los catetos de un triángulo van a ser las mismas por más que se le gire mil veces, solo cambia la posición en la que están, y en las ramas de las Ciencias Naturales, las Matemáticas y la Ingeniería, la posición puede ser, o más adelante, o más atrás de un punto al que al menos un analizador, el que está analizando dicho sea de paso, se refiere, antes o después de este punto se considera la posición como positiva o negativa, pero esto es solo para indicar posición y sentido, es decir hacia dónde se está enfocando, pero en la vida real, solo existen mediciones positivas, las negativas tienen un significado abstracto y depende del análisis que se esté dando.

Volviendo al tema, coseno es siempre positivo en el IV cuadrante, así se tiene que coseno de π/6 y sus múltiplos de 4 valen 1/2, y al estar esa expresión elevada al cuadrado, es decir ella se multiplica por ella misma, se tiene que ese resultado es 1/4.

Por lo tanto, si la primera expresión va multiplicada por 3, y la segunda por 1, el resultado será restar 3/2 con 1/4, o lo que es lo mismo, 6/4 (solamente se multiplicó por 1, es decir, se multiplicó el numerador por 2 y el denominador por 2, como 2/2 es 1, se está haciendo algo razonable, y por ende muy válido, correcto e indiscutible) con 1/4, para así obtener que el resultado es 5/4, esto es, la opción correcta es c).

2.1.10 PROBLEMA 2.1.10

Si $sen(k) = \frac{-2}{\sqrt{13}}$ y $\frac{-\pi}{2} < k < 0$, entonces, cos(k) es aproximadamente:

a) 0.8320

b) -0.8320

c) 0.2774

d) -0.2774

SOLUCIÓN

Solamente debe tomarse en cuenta la ecuación (identidad) trigonométrica básica que se indica en la ecuación 2.1.11-1, de ahí despejar coseno y obtener un aproximado del resultado, donde se debe solamente cambiar la variable o incógnita x por el número desconocido o variable k (se le llama variable a un número que no se mantiene fijo, sino que puede cambiar, por ejemplo, en un cronómetro, los segundos son una variable, en cambio una incógnita es un valor fijo, por ejemplo si se sabe que son más de las 10 de la mañana, y menos de las 11 de la mañana, el campo de las horas sería una incógnita, pero al razonar un poco se da cuenta que solo puede ser 10 y nada más que 10, es decir, era desconocida, pero es un valor fijo).

$$sen\, x^{2} + \cos x^{2} = 1 \tag{2.1.11-1}$$

De la ecuación 2.11-1 se puede obtener el resultado que indica la ecuación 2.1.11-2.

$$\cos(k) = +/- \sqrt{1 - (\frac{-2}{\sqrt{13}})^{2}} \tag{2.1.11-2}$$

La ecuación 2.11-2 puede reescribirse como señala la ecuación 2.1.11-3.

$$\cos(k) = +/- \sqrt{1 - \frac{4}{13}} \tag{2.1.11-3}$$

Si se simplifica la expresión de la ecuación 2.11-3 se obtiene la ecuación 2.1.11-4.

$$\cos(k) = +/- \sqrt{\frac{13}{13} - \frac{4}{13}} = +/- \sqrt{\frac{9}{13}} = +/- 3 * \sqrt{\frac{1}{13}} \tag{2.1.11-4}$$

Así las cosas, y dado que es un aproximado, solo hay que analizar lo que se tiene puede verse que el componente de la raíz está entre la raíz de 1/9 y la raíz de 1/16, es decir, es mayor a 1/3, pero menor a 1/4, así puede verse que el resultado está entre $+/-$ 1 & $+/-$ 3/4. Se ha recalcado el $+/-$ porque, a la hora de despejar coseno, inicialmente este estaba elevado a la segunda potencia, para cancelar las potencias se debe aplicar a ambos lados de las ecuaciones a la operación inversa, esto es, un radical cuya base sea la misma de la potencia a erradicar, ahora bien, si se tiene que la variable o incógnita, que puede ser x, t, a, β cos x, e^x, etc, está elevada a la segunda potencia y está solamente ésta en alguno de los dos lados de la ecuación, solamente ésta, entonces, quiere decir que la ecuación tiene 2 soluciones, una positiva y otra negativa. En este caso se provée un dato más, y es que el ángulo k (el argumento k), está entre –π/2 y 0, es decir está en el IV cuadrante (recordar lo relatado acerca de las referencias al principio de este documento), ahora, como coseno es positivo en el IV cuadrante, la solución no puede ser negativa, por lo tanto, solo se toma la solución positiva. Esta situación de aquí es una excelente ejemplo de lo que es la abstracción matemática, en el caso de Ingeniería, por ejemplo, la Matemática es una herramienta indispensable para convertir las situaciones cotidianas en expresiones analíticas (ecuaciones) con una o, usualmente, varias variables, esto permite llegar a solucionar problemas de la vida real desde un escritorio, hasta un sofá, o hasta una cama!, nada más razonando eso sí, sin embargo, esto es solo un modelo de la vida real, muchas veces, o siempre, a la solución matemática hay que interpretársele porque, al ser un modelo, este debe interpretarse para que se termine de apegar a la realidad, su solución. Un ejemplo es este problema, solo que aquí no se está modelando un caso concreto, sin embargo, sino se interpreta se tendrán dos soluciones, y una de ellas es imposible, la negativa, pues jamás el coseno será negativo si es IV cuadrante su argumento.

Por lo tanto, la única respuesta que es positiva y está en medio (en el intervalo) de 1 y 3/4 es la opción a), 0.8320. Esta es la opción correcta.

2.1.11 PROBLEMA 2.1.11

Si tan(θ) es negativo, con certeza se tiene que sen(2θ):

a) Es cero

b) Es negativo

c) Es positivo

d) No está definido

SOLUCIÓN

Como puede verificarse en la figura 2.3, cualquier argumento (ángulo en este caso) que esté en el segundo o cuarto cuadrante, inmediatamente da como resultado que la expresión tangente de ese ángulo es negativa, es decir, el argumento θ de la expresión tangente en cuestión está ubicado en el II o IV cuadrante. Así las cosas, si se está en el IV cuadrante, quiere decir que los ángulos abarcados van desde los 0˚ hasta los -90˚, así el doble de estos ángulos estarían todos ubicados en el III cuadrante, ahí seno es negativo. Si se analiza el caso de que estén ubicados los posibles ángulos θ en el II cuadrante, entonces los posibles ángulos θ medidos, como ya se había indicado entre el eje horizontal y otra recta que parte del origen, van de 0˚ para cuando se miden 180˚ respecto al semieje horizontal positivo, hasta los 90˚ para cuando se miden 90˚ respecto al semieje horizontal positivo. Así las cosas, el doble de estos posibles ángulos estarían ubicados en el III cuadrante, pues el ángulo máximo sería de 180˚ (esto correspondería a chocar en límite de 270˚) y el mínimo sería de 0˚ (esto correspondería a chocar con el límite de 180˚).

Es decir, independientemente del ángulo θ en cuestión, sin importar que éste esté en el II o IV cuadrante, el doble de este estará en el III cuadrante, donde seno es siempre negativo. Por lo que la respuesta correcta es la opción b).

2.1.12 PROBLEMA 2.1.12

¿Cuál de las siguientes expresiones no está definida?

a) $\cot(\frac{-11\pi}{2})$

b) $\tan(2012\pi)$

c) $\csc(\frac{9\pi}{2})$

d) $\sec(\frac{-19\pi}{2})$

SOLUCIÓN

A la hora de mencionar expresiones indefinidas debe tenerse claro a qué se refiere la expresión indefinido. Es bastante sencillo, saber el día de hoy a qué hora, en que minuto, en qué segundo va a caer un rayo en el pararrayos de algún edificio es prácticamente imposible, eso es algo indeterminado. Un ejemplo más de algo indeterminado es comentar acerca del número más grande, eso es indefinido, es decir, indefinido es algo desconocido, algo que, por lo usual es bastante grande, por esa razón, en Matemáticas, Ciencias

Naturales e Ingeniería, cuando se habla de algo muy grande, se le nombra con frecuencia como algo infinito. Para tener una idea aún más clara se insta a prestar atención a la secuencia de 4 cálculos mostrados en las ecuaciones 2.1.12-1, 2.1.12-2, 2.1.12-3 y 2.1.12-4.

$$\frac{1}{0.1} = 10 \tag{2.1.12-1}$$

$$\frac{1}{0.01} = 100 \tag{2.1.12-2}$$

$$\frac{1}{0.001} = 1000 \tag{2.1.12-3}$$

$$\frac{1}{0.0001} = 10000 \tag{2.1.12-4}$$

Como puede verse, entre más pequeño sea el denominador se hace más grande el resultado. Se pude profundizar más aún, entre más cercano a cero sea el denominador más grande se hará el resultado. Si se presta atención a las secuencias de ecuaciones 2.1.12.5 y 2.1.12.6 puede llegarse a concluir que con toda certeza, si prácticamente se llegará a dividir por un número que es “casi que cero”, el resultado sería demasiado demasiado demasiado grande, tan grande que no podría mencionarse, pues, de inmediato se puede encontrar un número aún más cercano y así por siempre, es ahí donde se tiene la esencia del infinito matemático.

$$\frac{1}{0.0000001} = 10000000 \tag{2.1.12-5}$$

$$\frac{1}{0.00000001} = 100000000 \tag{2.1.12-6}$$

Por lo que, cuando se habla de indefinido, es, exactamente a eso a lo que se refiere, a algo que no se puede describir con certeza, algo que no está definido. La noción más sencilla de eso es recordar lo que pasa al dividir por un número cada vez más cercano a cero (si se trata de dividir por cero en cualquier calculadora o programa de conmutación, se alertará en la pantalla que la operación solicitada no tiene solución, que se entró en condición de error en la solución matemática).

Así las cosas, se analiza, por obligación en este tipo de problemas en los que no hay un enunciado con información matemática, a analizar opción por opción hasta dar con la correcta.

Se analiza primero la opción a), cot($\frac{-11\pi}{2}$), para hacer más sencillo el análisis se recomienda poner atención a la figura 3.6, que corresponde a la función tangente que depende directamente del ángulo variable que se muestra en el eje horizontal, cuyas unidades (unidades como los metros, los litros, el peso en kilogramos que indican las romanas) son radianes.

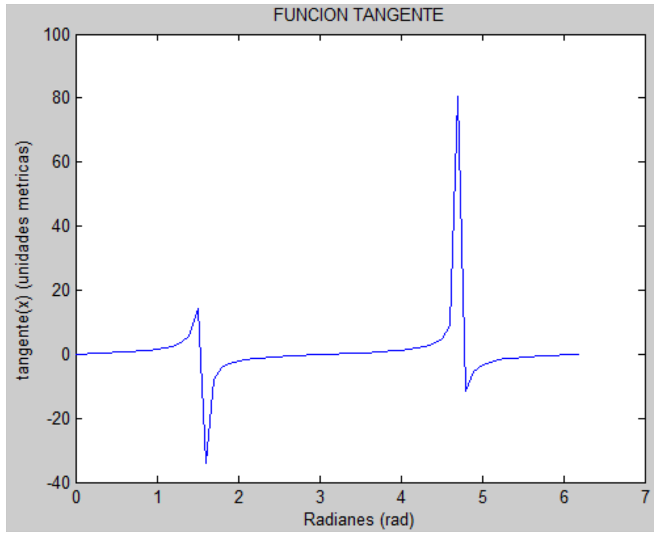

Figura 2.6: Función tangente.

Del análisis a la figura 2.6 y una explicación por parte del autor del documento puede desprenderse lo siguiente, si se conoce que el número irracional (los números irracionales son un subconjunto los números reales, con la característica de poseer infinitos decimales, los cuales no tienen un comportamiento repetitivo, es decir, 2.12121212…, no es un número irracional, pues es siempre predecible su comportamiento, es decir su comportamiento sigue un patrón, tiene un sentido, es razonable su comportamiento) π, es aproximadamente 3.14, entonces, puede verse en la figura 2.6 que en $\pi/2$ y $3\pi/2$ la forma de la gráfica, es decir el comportamiento de la función tangente, es irse bruscamente hacia arriba. Eso se puede hacer con lápiz o lapicero y un pedazo de papel, sin embargo, la forma de dibujarlo en papel cambiaría un poco respecto a la mostrada en la figura 2.6, pues, el programa en el cual se hicieron estas gráficas, como es de esperarse presenta dificultades de cálculo cuando se le pone a calcular algo indefinido, y es que la función tangente es indefinida para cuando su argumento es múltiplo impar del $\pi/2$. Por lo que, la manera de manifestar el programa esta dificultad de calcular algo indefinido a la hora de llegar a múltiplos impares de $\pi/2$ es mediante estos picos que indican que se quiere alcanzar un valor altísimo para una misma preimagen. Sin embargo, la función cotangente si está definida para múltiplos impares de $\pi/2$, pues esta función es 1/tangente, por lo que, si bien es cierto infinito es infinito, puede imaginarse un número altísimo, como un millón, si luego se toma un millón y se envía un denominador y el numerador de dicha fracción es 1, (recordar que $2/1 = 2$, $4/1 = 4$, $x/1 = x$, es decir todos los números son iguales a ellos mismos divididos entre 1) entones, el resultado será un número demasiado pequeño, tan pequeño que prácticamente no es nada, y en Matemáticas, nada es 0, por lo que dividir entre infinito (∞) da 0 como resultado. Por lo tanto a) no es la respuesta correcta.

Si se analiza b), $\tan(2012\pi)$, se verá que no tiene ningún riesgo de indefinirse, pues la función tangente solo muestra indefinición en múltiplos impares de $\pi/2$.

Al analizar c), $\csc(9\pi/2)$, se verá que tampoco presenta riesgo de indefinición, pues, cosecante es el recíproco de seno, esto es, como se sabe que seno es seno/1, entonces, se conoce como recíproco a elevar a la -1 un valor en cuestión, en forma práctica, el recíproco es darle la vuelta a la fracción (recordar, todos los números son fracciones, x es x/1). Ahora si seno con argumentos impares de $\pi/2$ es 1 o -1, entonces el recíproco nunca se indefine. Por lo que, sin necesidad académica de revisar la opción d), se puede concluir que la opción d) es la correcta. Sin embargo se va a verificar esta información.

Analizando la opción d) se tiene sec(-19π/2), donde secante es el recíproco de coseno, y coseno es cero para todo los múltiplos impares de π/2, por lo que, al dividir entre casi cero se tiende a ir a hacia ∞, esto es, indefinido. Con lo anterior se da otra muestra más de que la opción correcta es la d).

2.1.13 PROBLEMA 2.1.13

La expresión $sen(\frac{4\pi}{3} - \frac{9\pi}{4})$ es igual a:

a) $\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$

b) $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

c) $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$

d) $\frac{-\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$

SOLUCIÓN

Lo primero que se debe hacer es tener un argumento de una sola fracción, esto para saber qué múltiplo de los mostrados en la tabla 2.1 permitirá solucionar el problema. Para esto se homogenizan fracciones, como lo muestra la ecuación 2.1.13-1.

$$sen\left(\frac{4\pi}{3} - \frac{9\pi}{4}\right) = sen\left(\frac{4\pi * 4}{3 * 4} - \frac{9\pi * 3}{4 * 3}\right) = sen\left(\frac{(16\pi) - (27\pi)}{3 * 4}\right) = sen(\frac{-11\pi}{12}) \quad (2.1.13\text{-}1)$$

A partir de lo obtenido en la ecuación 2.1.13-1 se pueden obtener varias conclusiones, la primera de ellas es que el argumento es casi que –π, solo que 1/12 más que eso (recordar que los números negativos, entre más a la izquierda del semieje de los números negativos se encuentren, más pequeños son, aunque su valor absoluto sea más grande que el de los números negativos que realmente son más grandes que ellos). Así, se sabe que se está en el III cuadrante, donde seno es negativo, por lo que la opciones b) y c) no pueden ser la correctas, dado que ambas son positivas, distinto a lo que resulta seno en ese cuadrante.

En cuanto a la magnitud (el valor que una variable o incógnita tiene) de la expresión, se tiene que al estar muy próximo el argumento a $-\pi$, y como en seno todos los argumentos múltiplos de π hacen que seno sea 0, quiere decir que el resultado que se debe tener debe ser negativo y muy cercano a 0, así las cosas la respuesta correcta es la opción 2), sin importar el número aproximado que arroje esa expresión es el resultado negativo de menor magnitud, por lo que es la respuesta correcta la opción a).

2.1.14 PROBLEMA 2.1.14

Un intervalo donde es creciente la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por f(x) = -sen(x) es:

a) $[0, \pi]$

b) $[\pi, \frac{3\pi}{2}]$

c) $[\frac{-\pi}{2}, 0]$

d) $[2\pi, \frac{5\pi}{2}]$

SOLUCIÓN

La función –sen(x), de dominio real a codominio real, es una función con ámbito [-1,1], es decir, las imágenes están entre -1 y 1, incluyendo estás dos últimas. Además debe recordarse que al conjunto (números naturales, enteros, racionales, irracionales, reales) al que pertenecen toda la colección de posibles valores de la variable independiente (en este caso la variable x) es llamado conjunto dominio, y el conjunto al que pertenecen las imágenes es llamado codominio. La forma de la gráfica de –sen(x) es justo al revés de cómo funciona sen(x), es decir, tienen la misma forma, pero cuando una positiva entonces la otra es negativa. Así las cosas, cuando sen(x) decrece, -sen(x) crece, pues su crecimiento/decrecimiento es al revés. Así, sen(x) decrece entre $]\pi/2, 3\pi/2[$, por lo que en ese intervalo –sen(x) crece. Por lo que la opción b) es la correcta, pues, aunque no es todo el intervalo, con certeza, en ese lapso la función –sen(x) crece en detrimento de sen(x).

2.1.15 PROBLEMA 2.1.15

El periodo de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f(x) = -3 * cos($\frac{4x}{3} + \frac{9\pi}{4}$) corresponde a:

a) $\frac{\pi}{3}$

b) $\frac{3\pi}{2}$

c) $\frac{2\pi}{3}$

d) $\frac{27\pi}{16}$

SOLUCIÓN

Para hallar el periodo de una función coseno o seno o la que sea, solamente debe estudiarse su argumento y detectar cuando se llega al punto en el que el argumento empieza a tirar resultados tales que indiquen repetición de resultados. En el caso de funciones trigonométricas senoidales (funciones con forma seno o coseno) periodo es de 2π, además, si se estudia con detenimiento su argumento en este caso particular, lo único que debe contemplarse es dónde se percibe el inicio de la función, esto, graficando el eje horizontal de la variable independiente x ocurre en el instante en el que x vale cero, en dicho instante el argumento es ${}^{9\pi}/_{4}$, ahora para que la imagen correspondiente a esta preimagen se repita deberán pasar 2π radianes más, así las cosas, para encontrar el periodo de la función solamente debe obtenerse el valor de x para el cual el término que acompaña a ${}^{9\pi}/_{4}$ sea igual a 2π, el despeje de este valor se aprecia en la ecuación 2.1.15-1.

$$x = \frac{(2\pi)*(3)}{(4)} = \frac{2\pi}{3} \qquad (2.1.15\text{-}1)$$

Así las cosas, la respuesta correcta es c).

2.1.16 PROBLEMA 2.1.16

Considere la función $h\colon \left]-\pi, \frac{-\pi}{2}\right[\rightarrow \mathbb{R}$, h(x) = tan(x), y analice las siguientes proposiciones:

I. El ámbito de h es $[0, +\infty[$

II. $h\left(\frac{-3\pi}{4}\right) < h(\frac{-2\pi}{3})$

¿Cuáles de las proposiciones anteriores son verdaderas?:

a) Sólo la I.

b) Sólo la II.

c) Ambas.

d) Ninguna.

SOLUCIÓN

Lo primero, debe tenerse claridad en conceptos fundamentales de las funciones, para empezar, el concepto de dominio. El dominio de una función es el conjunto que comprenden todos los integrantes del grupo de posibles valores que puede tomar la variable independiente en cuestión (para Didáctica y Enseñanza usualmente se llama a la variable independiente como x, mientras que en una grandísima cantidad de problemas de Ingeniería, la variable independiente es el tiempo, cuyo símbolo es t). En cuanto al rango, es el conjunto de tosas las imágenes respectivas a las preimágenes que yacen en el dominio de la función.

Otro concepto que se debe manejar claro es el mostrado en la figura 2.3, en dicha figura se puede apreciar que todas las imágenes de tangente asociadas a preimágenes del III cuadrante son positivas y analizando un par de casos puede percibirse con facilidad que el ámbito es el conjunto $\mathbb{R}^{+}$. Es muy importante tener claro el significado de los paréntesis cuadrados abiertos o cerrados. Puede verse de la siguiente manera, los domingos, varios negocios abren pero por un tiempo más limitado que el que se presenta de lunes a viernes, por ejemplo, las 5 de la tarde es un límite que no muy usualmente es traspasado, entonces, cuando se tiene un límite claro, pero dicho límite nunca es alcanzado, entonces, en escritura (simbología) matemática esto se mostraría con un paréntesis abierto contiguo a esa cantidad (la hora en este caso). Ahora bien, para el caso de los paréntesis cerrados puede verse como la apertura de un edificio como una biblioteca, la hora se cumple justa, no antes, no después, sino justa, esto en simbología matemática se muestra con un paréntesis cerrado a la par de dicha cantidad. Por lo que, a partir de lo anterior, y además, como ∞ no es un límite claramente establecido, es más solo se sabe que es demasiadísimo grande, entonces, al no estar claro rigurosamente establecido el límite, es decir un número concreto, entonces se emplea un paréntesis abierto. Para cualquier número indefinido al cual se haga referencia, siempre se deberá asociar el mismo con un paréntesis cuadrado abierto en el lado que le corresponda. Por lo anteriormente analizado, la propuesta I. es verdadera.

Además, si sabe que en este problema, la función h y tangente son lo mismo, entonces, debe analizarse la propuesto en la propuesta II. Para esto solo se debe recordar que tan(x) es una proporción (división, cociente, fracción) de seno entre coseno, así se analiza como lo indican las ecuaciones 2.1.16-1 y 2.1.16-1.

$$h\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = \tan\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{sen\left({-3\pi}/{4}\right)}{\cos\left({-3\pi}/{4}\right)} = \frac{{-\sqrt{2}}/{2}}{{-\sqrt{2}}/{2}} = 1 \qquad (2.1.16\text{-}1)$$

$$h\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = \tan\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{sen\left({-2\pi}/{3}\right)}{\cos\left({-2\pi}/{3}\right)} = \frac{{-\sqrt{3}}/{2}}{{-1}/{2}} = \sqrt{3} \qquad (2.1.16\text{-}2)$$

Como puede verificarse en las ecuaciones 2.1.16-1 y 2.1.16-2, ambas proposiciones son correctas, por lo que la opción c) es la correcta.

2.1.17 PROBLEMA 2.1.17

Un intervalo donde la función $f\colon \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2\cos(x)$ es positiva corresponde a:

a) $]0, \pi[$

b) $\left]\frac{-\pi}{2}, 0\right[$

c) $\left]\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right[$

d) $\left]\pi, \frac{5\pi}{4}\right[$

SOLUCIÓN

La solución a este problema es bastante compacta, basta con razonar desde esta perspectiva, un número negativo es negativo aunque lo multipliquen por el número positivo más grande, así las cosas, cuando coseno normal (es decir, de amplitud 1, o sea, un coseno con un valor máximo de 1) sea negativo, lo será aunque lo multipliquen por 1 millón, así las cosas, se sabe que, como se analizó en la figura 3.5, la onda coseno es negativa para el lapso, paréntesis abiertos (esto pues en el instante que pasa de ser positiva a negativa y viceversa, no se es ni una ni la otra, es un instante de transición, allí vale 0) va de π/2 hasta 3π/2, por lo que, coseno será positiva, como era deducible, en los cuadrantes I y IV. Por lo que, la respuesta correcta es la que aparezca cubierta por alguno de esos 2 cuadrantes. Tal es el caso de la opción b), la cual, a la postre es la correcta.

2.1.18 PROBLEMA 2.1.18

Considere la gráfica de la figura 2.7 de una función j: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

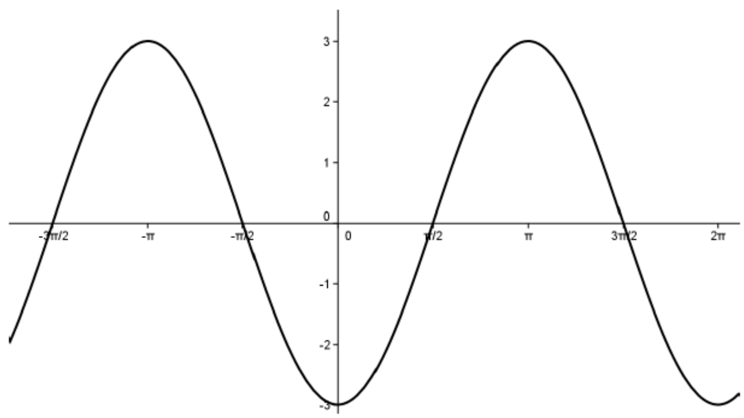

Figura 2.7: Función del problema 2.1.18.

Un criterio de la gráfica de la figura 2.7 es el siguiente:

a) j(x) = 3*sen($x + \frac{\pi}{2}$)

b) j(x) = 3*sen($x - \pi$)

c) j(x) = -3*sen($x - \frac{\pi}{2}$)

d) j(x) = -3*sen($x + \frac{\pi}{2}$)

SOLUCIÓN

Otro concepto de interés en el ámbito de funciones es el criterio de funciones, esto quiere decir, encontrar la relación de correspondencia analítica (es decir con una o varias ecuaciones) entre un conjunto y otro. Por ejemplo, si por accidente un estudiante dejó botado en una parada de buses muy lejana de algún centro educativo, cualquiera que vea el libro y al estudiante, debidamente uniformado, lo podrá asociar y le hará saber, tal vez, que olvidó su libro, en ese acto, se montó un criterio de correspondencia, es decir, se montó una función estudiante – libros. Así también hay cualquier cantidad de funciones cuyo objetivo, o al menos el del autor de este documento, no es más que enseñar los principios básicos de algo muy importante, el poder expresar eventos de la vida cotidiana en simbología matemática, esto con el propósito de así como siempre se sabe que uno más uno es dos, entonces, si se tiene la realidad escrita en números y ecuaciones, por lo tanto, se podrá predecir, anticipar y preparar todo lo que sea analizado, esto con fines positivos, claro está.

En fin, si se presta atención a la figura 7, esta gráfica es coseno, pero multiplicada por -1, pues en vez de comenzar por 1 comienza por -1, su periodo es de 2π. Sin embargo, no aparece esta como opción explícita a elegir, por esta razón debe escribirse esta respuesta en otros términos. Por ejemplo, si se presta atención a las figuras 4 y 5, son muy parecidas, al punto de si se toma seno y se "jala" π/2 radianes hacia atrás se podrá ver que la onda comienza con anterioridad, y que efectivamente, es la onda coseno. Cuando una onda comienza con anterioridad en el tiempo se dice que está adelantada en el tiempo, como aquel que llega 5 minutos temprano al trabajo, se dice que siempre está adelantado.

Así las cosas, coseno es seno con una anticipación de π/2 radianes, esto se expresa en el argumento de la función, como lo muestra la ecuación 2.1.18-1.

$$\cos(x) = \operatorname{sen}(x + {}^{\pi}/_{2}) \qquad (2.1.18\text{-}1)$$

Con la ecuación 2.1.18-1 se tiene una manera alternativa de analizar la onda coseno, ahora bien, si esta se multiplica por -1, quiere decir que la onda que se obtiene es coseno pero invertida, esto es, la forma de la función de la figura 2.7.

Dado lo anterior, con la manera alternativa de describir analíticamente a coseno, se puede de manera acertada afirmar que el criterio correcto de los 4 desplegados es el d).

2.1.19 PROBLEMA 2.1.19

Considere la función $b\colon \left]\frac{-3\pi}{2}, \pi\right[\to \mathbb{R}$, b(x) = cos(x) y analice las siguientes proposiciones:

I. b interseca al eje x dos veces.

II. Si $x \in \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, entonces: b(x) > 0.

¿Cuáles de las proposiciones anteriores son verdaderas?:

a) Sólo la I.

b) Sólo la II.

c) Ambas.

d) Ninguna.

SOLUCIÓN

Analizando la primera proposición se tiene que en ese tramo, la función coseno interseca en tres ocasiones al eje x (esto significa que la función coseno vale cero, lo cual es sinónimo de intersección con el eje x, pues, una gráfica de dos variables muestra la relación entre ambas, lo despegada que esté la gráfica del eje horizontal es un indicador de que tan elevado es el valor de la función para un valor de la variable independiente determinado, así, cuando una de las dos variables vale cero, gráficamente lo que se percibe es que la función solamente reside en el eje cuya variable no se ha anulado para ese determinado instante). Es muy sencillo identificar los puntos en los que la función coseno vale cero (hay que recordar que lo que usualmente se gráfica en el eje vertical son los valores de la función en cuestión), estos puntos son aquellos en los que la variable independiente es múltiplo (positivo o negativo) impar de π/2, así las cosas, para ese tramo, la función coseno vale cero para cuando la variable independiente es igual a -3π/2, - π/2 y π/2, sin embargo, dos de esos tres valores están excluidos del intervalo, precisamente los extremos, por tal razón la proposición I es falsa.

En cuanto a la proposición II, solo hay que tener en cuenta que, como lo indica la figura 2.3, coseno es negativo para el II y III cuadrante, así las cosas, la proposición II también es falsa.

Por los tanto la opción d) es la correcta, pues ambas proposiciones son falsas.

2.1.20 PROBLEMA 2.1.20

Si $\alpha \neq \frac{k\pi}{2}$, para cualquier k entero, la expresión tan(α) – cot(α) es igual a:

a) $\frac{\cos(2\alpha)}{sen(\alpha)*\cos(\alpha)}$

b) $-\frac{\cos(2\alpha)}{sen(\alpha)*\cos(\alpha)}$

c) $-\frac{1}{sen(\alpha)*\cos(\alpha)}$

d) $\frac{1}{sen(\alpha)*\cos(\alpha)}$

SOLUCIÓN

Aquí lo primero que debe hacerse es tener claro lo que se está siendo, como en todo, y en caso de faltar claridad pues se debe sospechar. Pues aquí lo particular es la restricción impuesta a los valores de α y k, la segunda restricción limita a k a ser entero, es decir, se estará hablando de múltiplos (como se mencionó anteriormente, se llaman múltiplos a números que son iguales a otros números solo que multiplicados por un número entero). En cuanto a la primera restricción es bastante estricta, la variable α no podrá tomar valores múltiplos enteros de π/2. Normalmente este tipo de restricciones se hacen para evitar que una función se indefina, esto es, que la función no pueda tomar valores que no están determinados, por ejemplo, nunca se podrá saber cuál es el número más grande de todo el conjunto de números reales, esto es un ejemplo de lo que es indefinido, así también en la vida cotidiana existen eventos que si bien es cierto se tiene parcialmente claros eventos que han ocurrido, no están totalmente determinados en el sentido estricto de la palabra, por ejemplo, muchas veces se conoce que se ha dado un evento o que se dará un evento, mas aún no se conoce con exactitud la hora del hecho, esto es un claro ejemplo de algo que es indeterminado. Precisamente ese, como se verá más adelante es el propósito de la restricción de los valores que tendrá α.

Ahora que se tiene bien establecidas las dos restricciones en cuestión se analizará la operación aritmética (recordar que la aritmética es una rama de las matemáticas que se encarga de estudiar y aplicar operaciones, como combinaciones, entre elementos de un espacio, donde el espacio es un precisamente un espacio que se está percibiendo, y en este caso son todos los conjuntos de números, y los elementos son los mismos números que integran ese espacio) presentada. La ecuación 2.1.20-1 muestra la operación en cuestión y una forma alternativa y equivalente que esta puede tomar.

$$\tan(\alpha) - \cot(\alpha) = \tan(\alpha) - \frac{1}{\tan(\alpha)} \qquad (2.1.20\text{-}1)$$

Ahora bien, si a la expresión mostrada en la ecuación 2.1.20-1 se simplifica, esto es juntarla en menos términos (donde se conoce como términos a miembros individuales, por ejemplo, en la operación aritmética 2*2, a pesar de ver escritos dos números, lo que se tiene es un solo término, pues una operación de multiplicación los vincula, sin embargo en la operación aritmética 2+2, ambos 2 son términos, pues son miembros aparte, es decir, los miembros son componentes separados en aritmética fundamental por operaciones sumas o restas). El proceso de simplificación se muestra en la ecuación 2.1.20-2.

$$\tan(\alpha) - \frac{1}{\tan(\alpha)} = \tan(\alpha) * \frac{\tan(\alpha)}{\tan(\alpha)} - \frac{1}{\tan(\alpha)} = \frac{\tan(\alpha)^2 - 1}{\tan(\alpha)} \qquad (2.1.20\text{-}2)$$

Como puede apreciarse en la ecuación 2.1.20-3, en vez de dos términos aislados se tiene un solo término, con varias sumas adentro, cierto, pero desde la vista superficial es solo un componente, un solo término, es decir es una expresión más compacta que la inicial. El proceso consistió en algo muy razonable, lo que se tiene es lo que se tiene, sin embargo, si se analiza el número 2, este será siempre igual a 2 aunque se multiplique por 1. U es que 1 tiene, al igual que todos los números reales, una infinidad de maneras de representarse, por ejemplo 2/2, 3/3, x/x, 15000 α/15000 α, etc, es decir, tomar una cantidad y dividirla entre ella misma. Exactamente lo anterior fue lo que se aplicó en el proceso de simplificación, se tomo a tangente y se multiplicó por una división de tangente entre tangente, es decir que se multiplicó por uno, y como 2*1 es igual a 2 o x*1 es igual a x (donde x es un número cualquiera o es un número fijo que no se conoce o solamente un número que se percibe como un caso general para hablar así de cualquier número, lo cual es bastante útil para estudiar en la vida cotidiana un evento particular, pero dentro de ese evento quieren estudiarse todos los posibles escenarios que se puedan dar, si esos escenarios depende fuertemente del tiempo, entonces, se debe dejar el tiempo como una variable de nombre (nomenclatura *t*)). Con lo anterior, aunque parece no muy útil pues solo se multiplicó por uno, realmente es bastante eficaz para propósitos de simplificación, pues con esa operación se logró tener un denominador igual en los términos de la operación, por esa razón se logró agrupar todo en una sola división. Se sigue trabajando la expresión (esto es, se sigue simplificando) como lo indica la ecuación 2.1.20-3.

$$\frac{\tan(\alpha)^2-1}{\tan(\alpha)} = \frac{\left(\frac{sen(\alpha)}{\cos(\alpha)}\right)^2-1}{\frac{sen(\alpha)}{\cos(\alpha)}} = \frac{\frac{\mathrm{sen}\,(\alpha)^2}{\cos(\alpha)^2}-\frac{\cos(\alpha)^2}{\cos(\alpha)^2}}{\frac{sen(\alpha)}{\cos(\alpha)}} = \frac{\frac{\mathrm{sen}\,(\alpha)^2-\cos(\alpha)^2}{\cos(\alpha)^2}}{\frac{sen(\alpha)}{\cos(\alpha)}} = \frac{\mathrm{sen}\,(\alpha)^2-\cos(\alpha)^2}{sen(\alpha)*cos(\alpha)} \quad (2.1.20\text{-}3)$$

La expresión desplegada en la ecuación 2.1.20-3 es muy parecida a las 4 opciones ofrecidas en las propuestas de resultado, sin embargo se requiere de un paso adicional, y es que ese paso el autor del documento lo sabe dar de una manera sencilla pero con el uso de un conjunto de números adicional a los cinco conjuntos de números estudiados en un programa de bachillerato en educación secundaria, razón por la cual, con el fin de no entrar en ese campo, se aplicará una ecuación válida y ya demostrada, dicha ecuación es la 2.1.20-4. Semejante a la ecuación 2.1.20-4 es la ecuación 2.1.20-5 la cual puede ser demostrada con facilidad por el método de aritmética de otro conjunto de números.

$$sen(\alpha)^2 = \frac{1-\cos(2\alpha)}{2} \qquad (2.1.20\text{-}4)$$

$$cos(\alpha)^2 = \frac{1+\cos(2\alpha)}{2} \qquad (2.1.20\text{-}5)$$

Así las cosas, de aplicar las ecuaciones 2.1.20-4 y 2.1.20-5 a la ecuación 2.1.20-3 se obtiene lo desplegado en la ecuación 2.1.20-6.

$$\frac{\text{sen }(\alpha)^2 - \cos\,(\alpha)^2}{sen(\alpha) * cos(\alpha)} = \left(\left(\frac{1-\cos(2\alpha)}{2}\right) - \left(\frac{1+\cos(2\alpha)}{2}\right)\right) * \frac{1}{sen(\alpha) * cos(\alpha)} = \frac{-2 * \cos(2\alpha)}{2 * sen(\alpha) * cos(\alpha)} \qquad (2.1.20\text{-}6)$$

Si se hace la división de 2 entre 2 que aparece en la ecuación 2.1.20-6 se tendrá que la opción correcta es la opción b).

PROBLEMA 2.1.21

La expresión $\frac{1}{1+\cos{(x)}} - \frac{1}{1-\cos{(x)}}$ es equivalente a:

a) -2 tan(x)

b) -2 tan $(x)^2$

c) 2 tan(x) sec(x)

d) -2 cot(x) csc(x)

SOLUCIÓN

Para solucionar este problema lo que se busca es simplificar la expresión matemática dada mediante la aplicación de aritmética. El primer paso para la simplificación se muestra en la ecuación 2.1.21-1.

$$\frac{1}{1+\cos{(x)}} - \frac{1}{1-\cos{(x)}} = \frac{1-\cos(x)}{(1+\cos(x))*(1-\cos{(x)})} - \frac{1+\cos(x)}{\left(1-\cos(x)\right)*(1+\cos(x))} \quad (2.1.21\text{-}1)$$

Lo primero que se busca es multiplicar por 1 para emparejar los denominadores, esto con el propósito de unir fracciones homogéneas (fracciones homogéneas son aquellas que poseen exactamente el mismo denominador). Si se aplica más aritmética se obtendrá lo desplegado en la ecuación 2.1.21-2.

$$\frac{1-\cos(x)}{(1+\cos(x))*(1-\cos{(x)})} - \frac{1+\cos(x)}{\left(1-\cos(x)\right)*(1+\cos(x))} = \frac{1-\cos(x)}{1-\cos{(x)}^2} - \frac{1+\cos(x)}{1-\cos{(x)}^2} \quad (2.1.21\text{-}2)$$

A partir de la ecuación 2.1.21-2 se obtiene la ecuación 2.1.21-3.

$$\frac{1-\cos(x)}{1-\cos(x)^2} - \frac{1+\cos(x)}{1-\cos(x)^2} = \frac{-2\cos(x)}{1-\cos(x)^2} = \frac{-2\cos(x)}{\mathrm{sen}(x)^2} = \frac{-2\cos(x)}{\mathrm{sen}(x)} * \frac{1}{\mathrm{sen}(x)} \quad (2.1.21\text{-}3)$$

La única identidad aplicada en la ecuación 2.1.21-3 es la mostrada en la ecuación 2.1.21-4, y en la ecuación 2.1.21-5 se tiene el resultado de la simplificación para obtener un solo término, tomando muy en cuenta que las funciones cosecante, secante y cotangente son nada menos que el recíproco (el recíproco es elevar a la potencia -1 cualquier cantidad en cuestión, esto es por ejemplo, el recíproco de 2 es ½, o sea, podría decirse un poco más coloquial “darle la vuelta”) de seno, coseno y tangente, respectivamente.

$$sen(x)^2 + \cos(x)^2 = 1 \quad (2.1.21\text{-}4)$$

$$\frac{-2\cos(x)}{\mathrm{sen}(x)} * \frac{1}{\mathrm{sen}(x)} = -2\cot(x)\csc(x) \quad (2.1.21\text{-}5)$$

Dado el resultado de la ecuación 2.1.21-5, la opción correcta es la opción d).

2.1.22 PROBLEMA 2.1.22

Al simplificar la expresión $sen(\pi + x) * sen(x - \pi)$ se obtiene la expresión:

a) 0

b) 1

c) $\cos(x)^2$

d) $sen(x)^2$

SOLUCIÓN

Para resolver este problema solo debe analizarse con cuidado la figura 2.4, si se pone cuidado puede percibirse que la función seno después de π radianes (180˚) es igual a una función pero con multiplicada por -1, ya sea que se comience a contemplar π radianes después del valor cero de su variable independiente o π radianes antes del valor cero de su variable independiente. Así las cosas, ambos componentes del producto en cuestión son iguales a –sen(x), por lo que, al cancelarse los signos negativos en esta multiplicación, el resultado es $sen(x)^2$, lo que dejaría a la opción d) como la opción correcta.

2.1.23 PROBLEMA 2.1.23

La expresión $\frac{\sec(x)}{\tan(x)} + \cot(x)$ es equivalente a:

a) $\frac{1 + sen(x)}{\cos(x)}$

b) $\frac{1 + cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}$

c) $\frac{sen(x) * (1 + \cos(x))}{\cos(x)^2}$

d) $\frac{cos(x) * (1 + \operatorname{sen}(x))}{\operatorname{sen}(x)^2}$

SOLUCIÓN

Se comienza la factorización tal y como lo indica la ecuación 2.1.22-1.

$$\frac{\sec(x)}{\tan(x)} + \cot(x) = \frac{\sec(x)}{\tan(x)} + \frac{1}{\tan(x)} = \frac{\sec(x)+1}{\tan(x)} = \frac{\frac{1}{\cos(x)}+1}{\tan(x)} = \frac{\frac{1+\cos(x)}{\cos(x)}}{\tan(x)} \quad (2.1.22\text{-}1)$$

Simplificando la ecuación 2.1.22-1 se obtiene la ecuación 2.1.22-2.

$$\frac{\frac{1}{\cos(x)}+1}{\tan(x)} = \frac{\frac{1+\cos(x)}{\cos(x)}}{\tan(x)} = \frac{1+\cos(x)}{\cos(x)*\tan(x)} = \frac{1+\cos(x)}{sen(x)} = (1+\cos(x)*\csc(x) \quad (2.1.22\text{-}2)$$

De acuerdo con la ecuación 2.1.22-2 la opción correcta es la opción b).

2.1.24 PROBLEMA 2.1.24

El ámbito de $f : \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\rightarrow \mathbb{R}$, *f(x) = tan(x)* es:

a) $\mathbb{R}$

b) $]0, +\infty[$

c) $]1, +\infty[$

d) $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

SOLUCIÓN

Es muy importante recalcar la importancia de los paréntesis abiertos, pues así las cosas, el conjunto de imágenes que puede tener la función coseno limita con cero, pero no lo incluye, pues la única forma en la que podía dar cero era que x pudiera ser cero para ese intervalo dado, y observando la figura 2.6, y los detalles que se explicaron de dicha figura en su momento, se puede dar cuenta que es una función continua (es decir, nunca tiene cambios bruscos, entiéndase como brusco a que en un punto determinado la gráfica se torne totalmente vertical) y que conforme se aproxima (pero nunca se llega por el intervalo dado) a π/2, la función tiende a ir hasta +∞ (debe notarse que el dominio es en el I cuadrante, donde tangente es siempre positivo). Por lo que la opción correcta es la opción b).

2.1.25 PROBLEMA 2.1.25

La expresión $\frac{sec(x) - \csc(x)}{\sec(x) * \csc(x)}$ es equivalente a:

a) cos(x) – sen(x)

b) sen(x) – cos(x)

c) 1

d) 0

SOLUCIÓN

Analizando la expresión en cuestión se obtiene lo indicado en la ecuación 2.1.25-1.

$$\frac{sec(x) - \csc(x)}{\sec(x) * \csc(x)} = \frac{\frac{1}{\cos(x)} - \frac{1}{\mathrm{sen}(x)}}{1/(\mathrm{sen}(x) * \cos(x))} = \frac{\frac{\mathrm{sen}(x) - \cos(x)}{\mathrm{sen}(x)*\cos(x)}}{1/(\mathrm{sen}(x) * \cos(x))} = \mathrm{sen}(x) - \cos(x) \quad (2.1.21\text{-}1)$$

Así las cosas, es evidente que la opción correcta es la opción b).

2.1.26 PROBLEMA 2.1.26

La expresión sen(arccos(x)) es igual a:

a) $\sqrt{1 - x^2}$

b) $1 - x^2$

c) $\frac{\sqrt{1- x^2}}{1- x^2}$

d) $\frac{1}{\sqrt{1- x^2}}$

SOLUCIÓN

Si viene es cierto a simple vista no parece que hay un camino muy sencillo para llegar a encontrar la solución, la verdad si lo hay, y a partir de los conocimientos desplegados a lo largo de este documento. La ecuación 2.1.26-1 muestra el punto de partida para este análisis.

$$\arccos(x) = \alpha \qquad (2.1.26\text{-}1)$$

La variable α que aparece en la ecuación 2.1.26-1 es solamente una manera más compacta de escribir el argumento del seno que es de interés en este momento. Muchas veces, una gran cantidad de expresiones obstaculizan la percepción de lo que realmente se tiene en frente, por esa razón, muchas veces es muy útil aplicar una sustitución de una larga expresión que es dependiente de una sola variable y reemplazarla por una variable sencilla, esto solo con el fin de hacer más compacta la expresión y de permitir tener un panorama más alentador para la solución del problema. Aplicando la sustitución anterior se muestra en la ecuación 2.1.26-2 la ecuación en términos de la variable sencilla α.

$$\operatorname{sen}(\arccos(x)) = sen(\alpha) = \sqrt{1-\cos{(\alpha)}^2} = \sqrt{1-x^2} \qquad (2.1.26\text{-}2)$$

Como en el fondo, cos(α) es lo mismo que x, entonces se obtiene lo indicado en la ecuación 2.1.26-2. Por lo tanto la opción correcta es la opción a).

2.1.27 PROBLEMA 2.1.27

Considere la función $w\colon [-1,1] \rightarrow [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, w(x) = arcsen(x) y analice las siguientes proposiciones:

I. $w\left(\frac{\pi}{4}\right) < w(\frac{\pi}{7})$

II. $w(0.8) < 0.8$

¿Cuáles de las proposiciones anteriores son verdaderas?:

a) Sólo la I.

b) Sólo la II.

c) Ambas.

d) Ninguna.

SOLUCIÓN

En la ecuación (realmente se debería llamar inecuación, pues es una comparación, pero no una igualdad) 2.1.27-1 se muestra la proposición I.

$$\operatorname{arcsen}(\pi/4) < \operatorname{arcsen}(\pi/7) \tag{2.1.27-1}$$

Si se aplica la operación seno a ambos lados de la ecuación, se sigue asegurando la ecuación, pues lo que se aplicó a un lado se aplicó de la misma manera en el otro, y eso es lo que se aplica en la ecuación 2.1.27-2.

$$\pi/4 < \pi/7 \tag{2.1.27-2}$$

La ecuación 2.1.27-1 muestra algo falso, pues se toma al mismo número (π) y se divide entre un número más grande que 4 (7 en este caso). Por lo tanto, la proposición I es falsa.

En la ecuación 2.1.27-3 se despliega lo enunciado en la proposición II.

$$\mathrm{arcsen}(0.8) < 4/5 \qquad (2.1.27\text{-}3)$$

Se aplica la operación seno a ambos lados de la desigualdad 2.1.27-2 (debe tenerse claro que el sentido de la desigualdad nunca cambia, a menos que se multiplique a ambos lados por un signo negativo, por ejemplo, un -1) para así obtener la ecuación 2.1.27-3.

$$0.8 < sen(\tfrac{4}{5}) \qquad (2.1.27\text{-}3)$$

Ahora bien se sabe que las imágenes conocidas más cercanos a la preimagen 4/5 son π/4 y π/3, según la tabla 2.1 que se sugirió debe memorizarse, estos valores tienen como imágenes a $\sqrt{2}/2$ y $\sqrt{3}/2$ respectivamente, en números con decimales aproximadamente son 0.7071… y 0.8687…, con π/4 y π/3 aproximadamente como 0.78 y 1.04, así las cosas, con solo un sumar dos centésimas a π/4 se estaría llegando a 0.8, lo cual, analizando el comportamiento suave de seno es prácticamente imposible que llegue a tan siquiera ser 0.8, por lo que la desigualdad propuesta en II es falsa también.

Así, la opción d) es la correcta.

2.1.28 PROBLEMA 2.1.28

La expresión $sen(2 *\ \text{arccos}\ (\frac{1}{2}))$ es igual a:

a) $\frac{-1}{2}$

b) $\frac{-\sqrt{3}}{2}$

c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

d) $\frac{1}{2}$

SOLUCIÓN

Podría tratarse de emular alguna sustitución semejante a la efectuada en el Problema 2.1.26, sin embargo, si se puede evitar hacer la sustitución no se va a negar emplear un camino más rápido y sencillo, quizá menos elegante, sí, pero bastante eficaz en términos de tiempo. La solución es muy sencilla, se sabe que arcoseno tiene como posibles preimágenes al intervalo cerrado de -1 a 1, y sus posibles imágenes, es decir su ámbito, va de –π/2 a π/2, incluyendo ambos extremos. Así las cosas, se sabe que arcoseno es la función inversa (llámese función inversa de una función a aquella función que cancela el efecto de esa otra función) de la función seno, es decir, si se tiene que seno(π/2) es 1, entonces, el seno inverso del seno(π/2) es π/2 mismo, pues se canceló la operación del seno, además, del otro lado de la igualdad se puede contemplar que el seno inverso de 1 es π/2, así se puede verificar para con todos los valores de la tabla 2.1.

Así las cosas, el arcocoseno de ½ sería aquel ángulo en radianes o en grados que hace que el coseno de dicho ángulo resulte en ½, y como se sabe que los únicos ángulos válidos en la función coseno inverso van de 0 hasta π, se sabrá entonces que dicho ángulo es $\pi/3$, luego, dentro del argumento del seno viene un 2 multiplicando, por lo que el argumento neto es $2\pi/3$, y el seno de dicho ángulo es $\sqrt{3}/2$, ahora bien, debe tenerse claro que a veces se deberá calcular senos, cosenos, etc, de ángulos que en el papel son superiores a los 180˚, y como se está hablando implícitamente de triángulos, algo parece no andar bien pues estos tienen como suma de sus ángulos internos un total de 180˚, lo cierto del caso es que la cantidad de grados que indica el argumento de una función trigonométrica no inversa es la cantidad de grados girados a partir de la referencia angular ubicada en el eje horizontal positivo, entonces, lo que se debe hacer es girar la cantidad de grados indicada en el argumento y a partir del punto de llegada formar un triángulo donde, por recomendación del autor para poder asegurar una manera sistemática de análisis, uno de los lados sea colineal con el eje horizontal (el concepto de colineal es una línea que está dentro de otra línea más o menos o igual en longitud). Así las cosas, el seno de $2\pi/3$ sería lo mismo que el seno de $\pi/3$, es decir el resultado, al estar en el II cuadrante, sería $+\sqrt{3}/2$. Por lo que la opción correcta sería la opción c).

Como información adicional, se muestran en las figuras 2.8, 2.9 y 2.10, las gráficas de las funciones arcoseno, arcocoseno y arcotangente. Se recomienda poner atención al ámbito de las tres funciones, y en caso de no expresarse un poco más evidente, el dominio de arcotangente es $\mathbb{R}$.

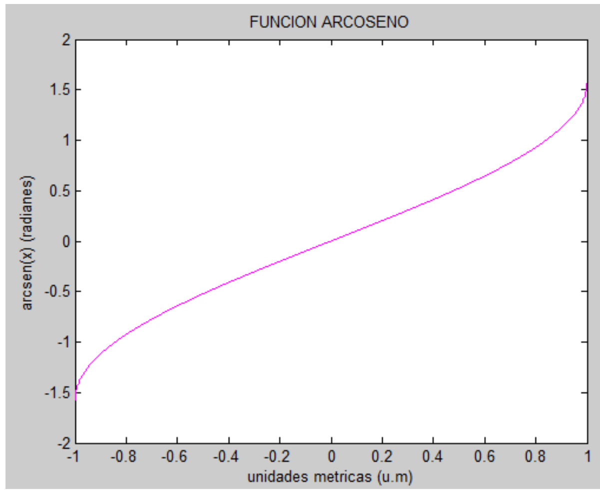

Figura 2.8: Función arcoseno.

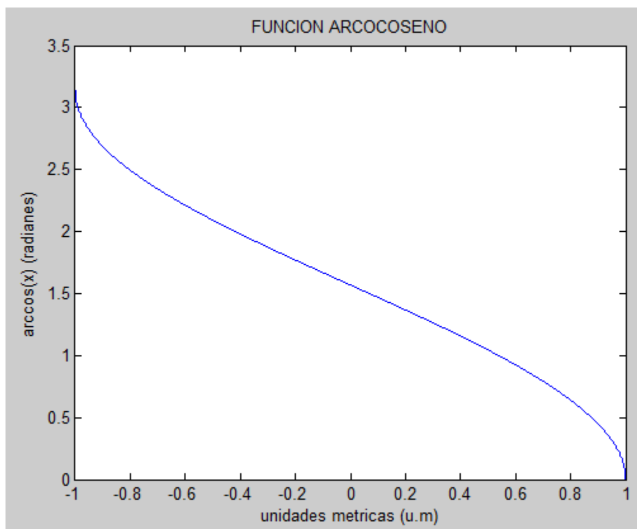

Figura 2.9: Función arcocoseno.

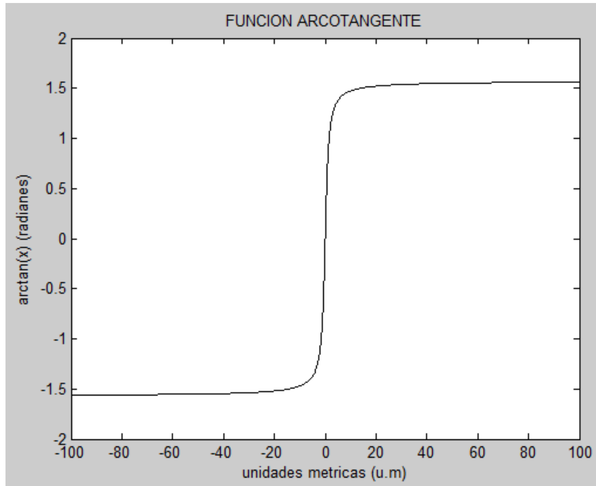

Figura 2.10: Función arcotangente.

2.1.29 PROBLEMA 2.1.29

Analice las siguientes proposiciones:

I. $\arctan\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1$

II. $\arctan\left(\tan\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) = \frac{5\pi}{6}$

¿Cuáles de las proposiciones anteriores son verdaderas?:

a) Sólo la I.

b) Sólo la II.

c) Ambas.

d) Ninguna.

SOLUCIÓN

Respecto a la proposición I, al aplicar la operación tangente a ambos lados de la ecuación se puede captar que la tangente de -1 debería ser igual a π/4. Para esto se analiza tangente como el cociente de seno entre coseno, donde -1 vendría a ser un poco más que π/3, y el -1 indica que se giro en sentido favorable a las agujas del reloj, esto es, se está en el IV cuadrante, al estar en ese cuadrante, coseno es positivo, y seno no lo es, entonces, el cociente será negativo, pero según la proposición es positivo, motivo suficiente para concluir que esta proposición es falsa.

La propuesta II es aún más sencilla, una operación cancela a la otra, y es fácilmente perceptible que la ecuación es correcta, así que la proposición II es verdadera.

Por lo tanto, la opción b) es la correcta.

2.1.30 PROBLEMA 2.1.30

El conjunto de todas las soluciones de $\sec^2(x) - 1 = -\sec(x) + 1$ si $0 \leq x \leq 2\pi$ es:

a) $\left\{\pi, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$

b) $\left\{0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right\}$

c) $\left\{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right\}$

d) $\left\{\pi, \frac{2\pi}{3}\right\}$

SOLUCIÓN

Debe primero tenerse claro qué tipo de ecuación se quiere resolver, puede ser de una variable, de dos o más variables, puede ser que aparente ser de una o varias variables pero que hasta entre ellas mismas se cancelen y quede nada más una igualdad, pero antes de eso se debe tener claro para cuál variable se quiere resolver, como se mostró en la ecuación 2.1.26-1, una variable puede estar en términos de otra variable, así por ejemplo, en este problema podría decirse con total validez que la variable para la cual se desea resolver la ecuación sea sec(x), y al estar dicha variable elevada a la segunda potencia, entonces dicha ecuación sería de segundo grado. O bien, la ecuación podría resolverse para la variable x. De la forma que sea, en esta solución se resolverá la ecuación para la variable sec(x). En la ecuación 2.1.30-1 se muestra la ecuación a resolver en este problema.

$$\sec^2(x) - 1 = -\sec(x) + 1 \;\rightarrow\; \sec^2(\mathrm{x}) + \sec(\mathrm{x}) - 2 = 0 \qquad (2.1.30\text{-}1)$$

Dado que solo se tiene una variable, y se está tratando con una ecuación cuadrática, entonces la pauta a seguir es la ecuación 2.1.30-2, donde los coeficientes a, b y c, son los números que multiplican a la variable elevada a la 2, al a 1 y a la 0, respectivamente. Una recomendación particular del autor, deben hacerse todos los esfuerzos posibles para asegurar que el coeficiente a sea siempre igual a 1, sin embargo, como en este documento la norma ha sido nunca hacer uso de la calculadora, y eso se va a mantener hasta el punto final de este documento, entonces no debe preocuparse el usuario por ese detalle.

$$\sec(x) = \frac{-b \pm \sqrt{(-b^2) - 4 * a * c}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{(-1^2) - 4 * 1 * -2}}{2 * 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} \qquad (2.1.30\text{-}2)$$

Según la ecuación 2.1.30-2, los dos valores de secante que permiten resolver la ecuación cuadrática en cuestión son 1 y -2. Si además se conoce que secante es el recíproco de coseno, entonces, los valores en radianes de x que permiten resolver la ecuación serían 0 para cuando secante es 1, y para cuando secante es -2 serían 2π/3 y 4π/3. No se incluye ningún valor ni anterior ni posterior al intervalo dado pues se saldría del intervalo de solución dado. Por lo anterior la opción correcta es la opción b).

2.1.31 PROBLEMA 2.1.31

El conjunto de solución de $1 - csc^2(x) = 0$ es:

a) $\{k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$

b) $\left\{k\frac{\pi}{2} / k \in \mathbb{Z}\right\}$

c) $\left\{\frac{\pi}{4} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$

d) $\left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$

SOLUCIÓN

La ecuación se resuelve para la variable csc(x), como lo indica la ecuación 2.1.31-1.

$$\csc^2(x) = 1 \rightarrow \frac{1}{\mathrm{sen(x)}} = \pm\sqrt{1} \rightarrow sen(\mathrm{x}) = \pm 1 \qquad (2.1.31\text{-}1)$$

La ecuación 2.1.31-1 da la solución al problema en cuestión, todos los valores de x que ocasionen que el valor de seno sea 1, sea positivo o negativo, y bien se sabe de la figura

2.4 que seno tiene su valor máximo sin importar el signo en todos los múltiplos de $\pi/2$, lo anterior se representa como $k\pi/2$, para cualquier k entero, por lo que la opción correcta es la opción b).

2.1.32 PROBLEMA 2.1.32

Considere las siguientes ecuaciones:

I. tan(x) – 7 = 0

II. 3*sen(x) – 11 = 0

¿Cuáles de las ecuaciones anteriores tiene solución en $\mathbb{R}$?:

a) Sólo la I.

b) Sólo la II.

c) Ambas.

d) Ninguna.

SOLUCIÓN

Se analiza la ecuación I en la ecuación 2.1.32-1.

$$\tan(x) = 7 \rightarrow x = \arctan(7) \tag{2.1.32-1}$$

Como se puede apreciar en la figura 2.6, la función tangente es periódica, es decir, la imagen 7 se repetirá a lo largo de todo el dominio, que incluye todo el conjunto $\mathbb{R}$, así las cosas, a lo largo de $\mathbb{R}$ habrán infinitas soluciones para un argumento que haga que tangente sea 7, por lo que el conjunto de solución de esta ecuación realmente está en $\mathbb{R}$, así como claro está, no todo ese conjunto son soluciones de esa ecuación, pero si todas las soluciones pertenecen al conjunto de los números reales.

Se analiza la ecuación II en la ecuación 2.1.32-2.

$$\mathrm{sen}(x) = 11/3 \rightarrow x = \mathrm{arcsen}(11/3) \qquad (2.1.32\text{-}2)$$

Para empezar la ecuación 2.1.32-2 no tiene solución, pues con solo ver las imágenes de las supuestas soluciones x son sencillamente imposibles, puesto que seno tiene imágenes que van entre -1 y 1, y 11/3 es mayor que 1, por lo tanto la ecuación b ni siquiera tiene solución.

Por lo tanto la opción a) es la opción correcta.

2.1.33 PROBLEMA 2.1.33

En ℝ, el conjunto solución de $cos^2(x) + 2 = 3\cos(x)$ es:

a) $\{x \in \mathbb{R} /\ x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

b) $\{x \in \mathbb{R} /\ x = k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

c) $\left\{0, \frac{\pi}{2}\right\}$

d) $\{\emptyset\}$

SOLUCIÓN

En la ecuación 2.1.33-1 se despliega la ecuación a resolver.

$$\cos^2(x) - 3\cos(x) + 2 = 0 \rightarrow \cos(x) = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} \qquad (2.1.33\text{-}1)$$

A partir de la ecuación 2.1.33-1 se puede concluir que aquellas preimágenes que ocasionen que coseno sea 2 o 1 permiten que la ecuación se cumpla, sin embargo, coseno jamás será 2, lo que si puede ser es 1, además, al indicarse que el espacio de soluciones sea a los largo de los números reales, entonces, como se puede apreciar en la figura 2.5, rodos aquellos valores de preimágenes que sean múltiplos pares de π son soluciones para esta ecuación, lo anterior se representa como: $x \in \mathbb{R}/x=2k\pi/k\in\mathbb{Z}$ (para x que pertenece a los números reales, para todos los valores de x que sean valores de π multiplicados por 2k, para cualquier k que pertenezca al conjunto de números enteros, es decir, las soluciones a la ecuación son números reales y múltiplos pares de π). Por lo que la opción correcta es la opción a).

2.2 DESARROLLO

2.2.1 PROBLEMA 2.2.1

Verifique la siguiente identidad trigonométrica:

$$\frac{\tan(x) + sen(x)}{sen^3(x)} = \frac{1}{\cos(x) - cos^2(x)}, para\ x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{k\pi}{2} \in \mathbb{R}/k \in \mathbb{Z}\right\}$$

SOLUCIÓN

Cuando se tiene que demostrar una ecuación lo que se debe hacer es partir de uno de los dos lados de la igualdad y trabajar dicha expresión hasta llegar a la expresión que está del otro lado. En esta ocasión se va a partir del lado izquierdo de la ecuación. El primer progreso en este trabajo al lado izquierdo lo muestra la ecuación 2.2.1-1.

$$\frac{\tan(x)+sen(x)}{sen^3(x)} = \frac{\frac{sen(x)}{\cos(x)}+sen(x)}{sen^3(x)} = \frac{\frac{sen(x)+sen(x)*\cos(x)}{\cos(x)}}{sen^3(x)} = \frac{\frac{1+\cos(x)}{\cos(x)}}{sen^2(x)} = \frac{1+\cos(x)}{sen^2(x)*\cos(x)} \quad (2.2.1\text{-}1)$$

Ahora bien, se continúa el trabajo de la expresión de 2.2.1-1 en la ecuación 2.2.1-2.

$$\frac{1+\cos(x)}{sen^2(x)*\cos(x)} = \frac{1+\cos(x)}{(1-cos^2(x))*\cos(x)} = \frac{1+\cos(x)}{(1+\cos(x))*(1-\cos(x))*\cos(x))} = \frac{1}{\cos(x)-cos^2(x)} (2.2.1\text{-}2)$$

Por lo tanto, queda demostrada la igualdad. (Recordar las llamadas fórmulas notables, la empleada en este caso fue ($a^2 - b^2$)= (a+b)*(a-b)).

PROBLEMA 2.2.2

Considere la función f: $\left[\frac{-\pi}{4}, \pi\right] \to \mathbb{R}, f(x) = 3\cos(2x - \pi)$.

Determinar:

a) El ámbito y el periodo de *f*.

b) Determine los cortes de la gráfica con los ejes.

c) Trace la gráfica de *f*.

SOLUCIÓN

En la ecuación 2.2.2-1 se muestra la ecuación que debe será analizada.

$$f(x) = 3\cos(2x - \pi) \tag{2.2.2-1}$$

Al mostrar la ecuación 2.2.2-1 una función coseno multiplicada por 3 (es decir, con amplitud 3), su ámbito va a ser el mismo que el de una onda coseno común, solo que multiplicado por 3, es decir, su ámbito va de -3 a 3, por lo que su ámbito es $[-3,3]$.

Para encontrar el periodo de esta función, solamente se debe analizar su argumento, este mismo indica cuántos radianes deben transcurrir para que la función vuelva a repetirse, y es que, cualquier función senoidal o cosenoidal tienen periodo de 2π, así las cosas, nótese que, solo con el fin de descubrir el periodo se empiece a analizar para cuando x sea cero, entonces, para que se sumen 2π radianes al argumento lo que se requiere es que solamente pasen π radianes, pues la variable x va multiplicada por 2, esto significa que, para sumarle a los –π radianes iniciales 2π radianes adicionales, x solo tuvo que incrementarse π radianes.

En cuanto a la gráfica de esta función solamente se debe basar en la función coseno original, multiplicarla por 3 y después adelantarla en el eje horizontal (esto es, moverla hacia la derecha) un total de π radianes (como se mencionó antes, cuando x es cero, el argumento ya está con π radianes de atraso, por eso comienza después que una onda coseno con argumento inicial de cero, como cos(x)).

En la figura 2.11 se muestra la gráfica correspondiente a este problema.

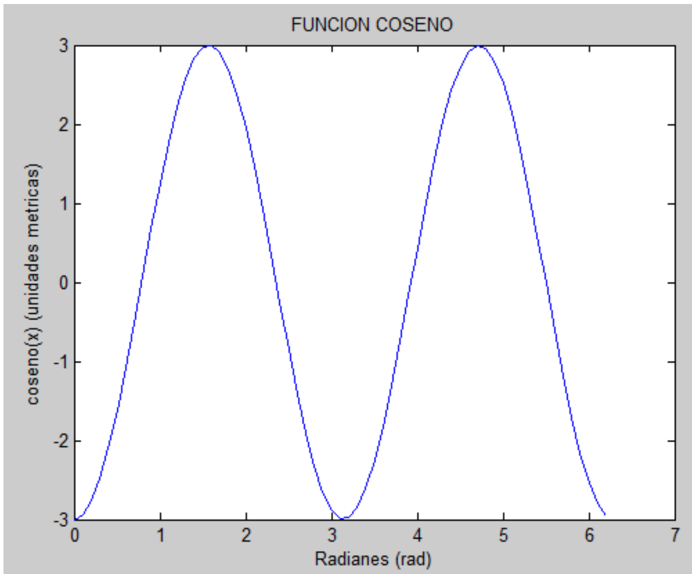

Figura 2.11: Gráfica del Problema 2.2.2.

2.2.3 PROBLEMA 2.2.23

Determine en ℝ el conjunto solución de:

$$4\, sen^2(x)\, cos^2(x) = \; cos^2(x)$$

SOLUCIÓN

Se reescribe la ecuación en cuestión en la ecuación 2.2.3-1.

$$4\, sen^2(x)\, cos^2(x) = \; cos^2(x) \rightarrow 4\, sen^2(x)\, cos^2(x) - cos^2(x) = 0 \qquad (2.2.3\text{-}1)$$

Debe recordarse que, siempre las soluciones que implican despejar una variable que está a la segunda potencia tienen una solución positiva y otra negativa porque al estar la variable elevada al cuadrado, si bien es cierto, su resultado será siempre positivo, también es cierto que la variable elevada al cuadrado será positiva aunque fuera la variable negativa, porque, precisamente una variable al cuadrado es que esa variable aparezca dos veces en un producto, ella por ella, cancelando así el signo negativo, por esa razón, en esos casos hay una solución positiva y negativa.

Ahora bien, se analiza lo enunciado en la ecuación 2.2.3-2.

$$4\, sen^2(x)\, cos^2(x) - cos^2(x) = cos^2(x) * (4\, sen^2(x) - 1) = 0 \qquad (2.2.3\text{-}2)$$

Para que la ecuación 2.2.3-2 pueda satisfacerse se tienen tres formas, que el factor de coseno al cuadrado sea cero, que el término de 4 seno al cuadrado sea 1, o ambas, ahora, para que coseno sea cero se requiere que x sea múltiplo entero de π/2, y para que el componente completo (incluida la resta por -1) de seno sea cero se requiere que seno de x sea +1/2 o -1/2, es decir que sea x π/6 radianes, en cualquiera de sus formas, positiva o negativa, es decir, en grados, que sea 30˚, 150˚, 210˚ y 330˚, y como se analizaron los casos por aparte se utilizan múltiplos pares para cada caso.

Así las cosas, se muestra en la ecuación 2.2.3-3 el conjunto solución de este problema.

$$S = \left\{ x/x \in \mathbb{R}\,, x = \frac{\pi}{2} + k\pi, o, x = \pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi, o, x = \pm\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} (2.2.3\text{-}2)$$

Finalmente, se hizo una simplificación, en vez de poner todos los casos se hizo lo que sigue, en vez de poner 330˚ y 30˚ uno por aparte, se hizo, $\pm 30^\circ$ y se le suma una repetición en cada valor de 2π, lo mismo se hizo para 150˚ y 210˚, y desde luego que se aplicó la propiedad de linealidad de la función para determinar el equivalente en radianes de los grados antes enunciados (es decir, si se quiere percibir así, se empleó “regla de tres”.)

3. Capítulo 4: Conclusiones y Recomendaciones

3.1 Conclusiones

El documento en cuestión bien pudo haber sido otro totalmente distinto, inclusive de otro tema de los habituales en los programas de Matemática de Secundaria, ode algún otro examen parcial representativo del curso MA-0125, sin embargo, el autor se dio a la tarea de buscar en una serie de exámenes propuestos por la modalidad EXMA de la Escuela de Matemáticas de la Universidad de Costa Rica, ofrecidos en el sitio virtual www.emate.ucr.ac.cr, donde el autor dio con temas en donde hasta dónde el autor recuerda son temas que tienden a ser mal aplicados debido a muy diversos factores, lo cierto del caso es que no es raro ver mala formación en los temas de trigonometría, funciones trigonométricas y ecuaciones trigonométricas y en general, por esa razón se decidió por inclinarse a redactar este documento.

Este trabajo puntualmente enfatiza los siguientes objetivos:

- Concepto de círculo trigonométrico.
- Conceptos de las razones trigonométricas.
- Conceptos de las razones trigonométricas recíprocas.
- Características fundamentales de las funciones trigonométricas (amplitud, periodo, desfase, adelanto o atraso, concepto de corrimiento de fase).
- Gráficas de función trigonométrica vrs radianes.
- Concepto de igualdad (ecuación),

- Concepto de desigualdad (inecuación).
- Concepto del teorema de Pitágoras.
- Aplicación de método de sustitución de una variable.
- Concepto de funciones trigonométricas inversas.
- Gráfica de función trigonométrica inversa vrs unidades métricas.
- Esencia de la demostración de una ecuación.
- Concepto de conjunto solución.
- Conceptos fundamentales de una función: función, dominio, ámbito, preimagen, imagen.
- Concepto de intervalo incluyente y excluyente.
- Determinación del conjunto solución de una ecuación trigonométrica en intervalo limitado incluyente, o excluyente.
- Determinación del conjunto solución de una ecuación trigonométrica con soluciones en todo $\mathbb{R}$.
- Concepto fundamental de valor indefinido con tendencia a ∞.
- Concepto de función lineal, con énfasis en la función lineal de grados vrs radianes.
- Determinación de la pareja (imagen o preimagen) a partir de un par ordenado conocido de una función lineal.
- Se recalca el no utilizar calculadora para la asimilación y familiarización de conceptos, esto fue seguido a cabalidad en la redacción del documento.

- Insistente y continuo enfoque de los conocimientos en Álgebra y Trigonometría en aplicaciones prácticas en el campo de la Ingeniería, y por supuesto en la solución de problemas de la vida cotidiana.

3.2 Recomendaciones

A pesar de ser este documento, a criterio del autor, una guía de utilidad apreciable para un autodidacta, debe ser leída tantas veces sea necesario por el usuario, debe ser entendido en su totalidad, puesto en práctica, no solo con los problemas aquí desplegados, sino con cualquier otro material de práctica paralelo al contenido aquí cubierto.

Una recomendación de mucha consideración es que, el usuario no haga uso de una máquina calculadora, entre más práctica tenga, mayor independencia tendrá el usuario respecto a una calculadora, con esto, la capacidad de ubicación en cualquier problema de esta naturaleza le será muy ventajosa al que siguiere esta recomendación.

Se recomienda práctica extensiva (llámese extensiva unos 80 o 100 problemas), sin embargo, si no se llegan a dominar los conceptos aquí mostrados la práctica podría arrojar resultados engañosos a pequeño, mediano o largo plazo, así que, lo primero es dominar los conceptos mostrados a lo largo de este trabajo.

Una vez que se considera el usuario en buen nivel, puede entonces adiestrarse en la manipulación de una calculadora, recomendable científica, y debe ponerse particular atención a las recomendaciones dadas a lo largo de este trabajo, además de poner cuidado al modo de solución de ecuaciones empleado. Debe tenerse mucho cuidado con el orden y ubicación de los parámetros según la calculadora empleada (parámetros a, b y c, para, por ejemplo, una ecuación cuadrática). Además de, poner cuidado a si el modo de la calculadora está en grados o en radianes. Por lo que se recomienda leer con cautela el manual de la calculadora y con detalle cómo se utilizan las funciones de interés.

BIBLIOGRAFÍA

Artículos de revistas:

1. Proyecto MATEM, Escuela de Matemática Universidad de Costa Rica. “IV Examen Parcial 2011, MA-0125 Matemática Elemental”, **Proyecto Matem 2011**, Costa Rica, 2011.

Páginas web:

2. Compendio de exámenes MA-0125,Escuela de Matemáticas Universidad de Costa Rica. **“IV Examen Parcial, MA-0125 Matemática Elemental, 2011”**, www.emate.ucr.ac.cr, accesada el 15 de Julio del 2012.