Solucionario

Matemática I Térraba 2013

Elaborado por: José Alberto Cordón Camacho.

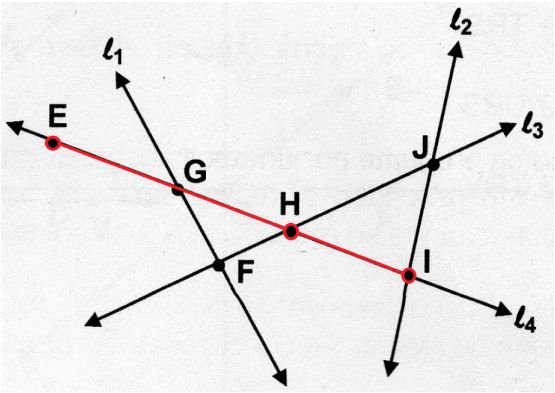

Figura 1: Pregunta 1

1 Tres puntos son colineales si se ubican en la misma recta. Gráficamente, si se conectan deben formar una línea recta. Si une, por ejemplo, G, F y H, se forma un triángulo, por lo que no son colineales. De las opciones dadas, los únicos puntos que forman una recta son E, H y I, como se muestra en la figura 1. *Opción correcta*: B.

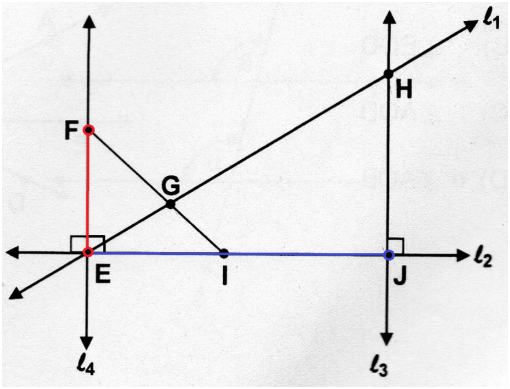

Figura 2: Pregunta 2

2 En la figura **??** se indica, con certeza, que l_4 y l_3 son perpendiculares a l_2, únicamente. Por lo tanto, se debe buscar entre las opciones cuáles rectas son equivalentes a las indicadas anteriormente. En este aspecto, l_4 equivale a $\overleftrightarrow{FE}$, l_3 a $\overleftrightarrow{HJ}$ y l_2 a $\overleftrightarrow{EJ}$. De las respuestas, las dos rectas perpendiculares son $\overleftrightarrow{FE}$ y $\overleftrightarrow{EJ}$, que se muestra en rojo y en azul, respectivamente. *Opción correcta*: B.

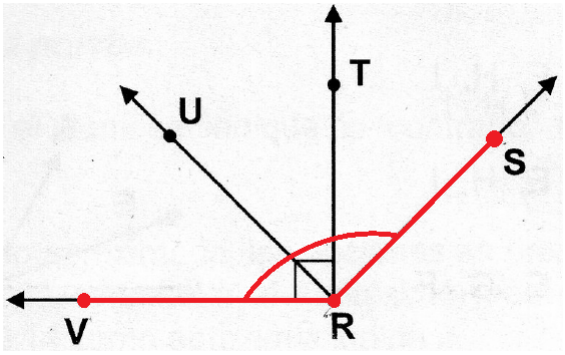

Figura 3: Pregunta 3

3 Las siguientes opciones no son correctas:

B) $\angle TRS$: es agudo, mide menos de 90°.

C) $\angle URS$: en este ángulo se carece de la información necesaria para saber su medida. Note que se compone de los ángulos $\angle TRU$ y $\angle TRS$, que son agudos, pero no se sabe si su suma es mayor, menor o igual a 90°.

D) $\angle TRV$: es un ángulo recto, mide 90°.

El ángulo obtuso es $\angle SRV$, como se muestra en rojo en la figura 3. Note que es la suma del ángulo recto $\angle TRV$ más el agudo $\angle TRS$, por lo que mide más de 90°. *Opción correcta*: A.

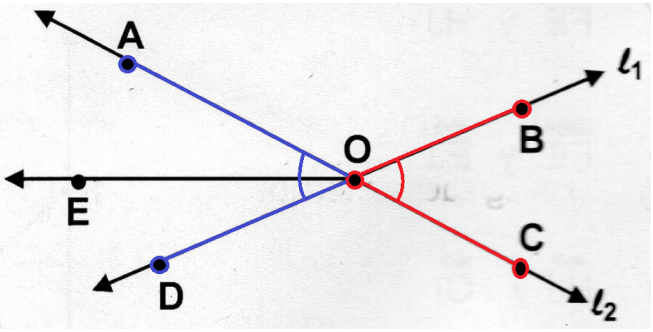

Figura 4: Pregunta 4

4 El vértice siempre corresponde a la letra del centro en el ángulo. Por lo que un ángulo opuesto a $\angle BOC$ debe tener en el centro la O. Además, debe medir lo mismo y formar una X al unir los puntos que conforman cada ángulo. De esta manera, se puede ver en la figura 4 que el opuesto a $\angle BOC$, en rojo, es $\angle AOD$, en azul. *Opción correcta*: C.

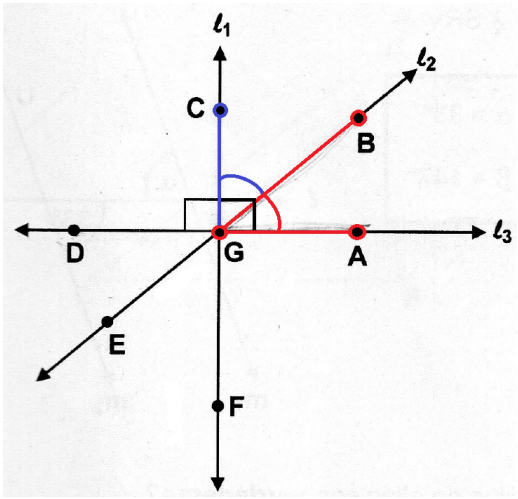

Figura 5: Pregunta 5

5 Dos ángulos son complementarios si su suma da 90°. Se desea conocer el complementario de $\angle BGA$, que se muestra en rojo. Se debe encontrar cuál ángulo, junto con el rojo, forma un ángulo recto.

Se indica que las rectas l_1 y l_2 son perpendiculares, por lo que el ángulo que forman al intersecarse es de 90°. Así, se sabe que $\angle CGA$ es un ángulo recto.

Como $\angle CGA$ incluye a $\angle BGA$, se puede identificar su complementario, el cual se encuentra azul en la figura 5, y corresponde a $\angle BGC$. *Opción correcta*: A.

6 Las siguientes respuestas son incorrectas:

A) Alternos internos: para esto, ambos deben encontrarse entre las rectas n y m, pero esto no ocurre con el ángulo θ.

B) Alternos externos: ambos deben ubicarse fuera de la sección entre las rectas n y m, pero α no cumple esta condición.

D) Conjugados internos: mismo problema que con la opción A.

La respuesta válida es que son correspondientes, es decir, miden lo mismo y no requieren ser ambos internos o externos. *Opción correcta*: C.

7 La proposición I es correcta. El ángulo α es alterno interno del ángulo de 33°, al fijarnos entre las rectas m_1 y m_2, por lo que miden lo mismo.

La proposición II es también cierta. Si nos centramos en las rectas m_2 y m_3, el ángulo de 33° y β son colaterales externos (del mismo lado, fuera de las rectas). Esto implica que son suplementarios, es decir, su suma da 180°. Así,

$$\beta + 33^\circ = 180^\circ$$

que es equivalente a

$$\beta = 180^\circ - 33^\circ = 147^\circ.$$

Opción correcta: A.

8 Los lados de un triángulo deben cumplir la desigualdad triangular, es decir, la suma de dos lados tiene que ser superior a la longitud del tercero. Si a, b, c son los lados de un triángulo, entonces $a+b>c$, $a+c>b$ y $b+c>a$. Las opciones incorrectas son:

B) $2+1=3\leq 5$

C) $1+3=4\leq 5$

D) $2+7=9\leq 10$

La opción A cumple todas las condiciones, pues $9+3=12>8$, $9+8=17>3$ y $3+8=11>9$. *Opción correcta*: A.

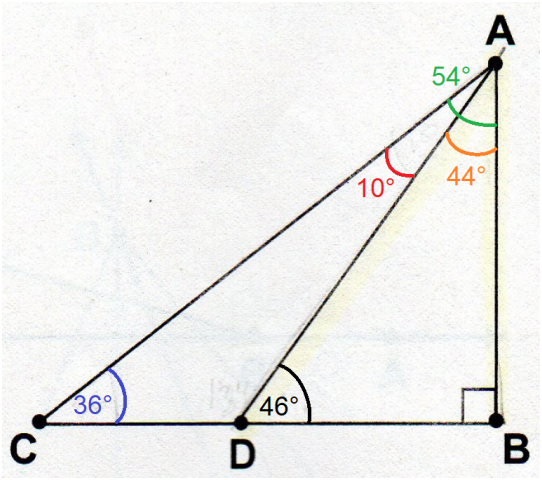

Figura 6: Pregunta 9

9 Enfocados en el triángulo ABC, se tiene la medida de dos de sus ángulos internos: m $ABC=90°$ y m $ACB=36°$ (en azul). De esta manera, el otro ángulo, $\angle BAC$ (en verde), mide 180° menos la suma de la medida de los otros ángulos internos. Esto ya que la suma de todos los ángulos internos de un triángulo da 180°. De esta manera,

$$\text{m}\angle BAC = 180° - \text{m}\ \angle ABC - \text{m}\ \angle ACB = 180° - 90° - 36° = 54°.$$

Observe que $\angle BAC$ es la unión de $\angle DAC$ (en rojo) y $\angle BAD$ (en naranja). Esto implica que

$$\text{m}\ \angle BAC = \text{m}\ \angle DAC + \text{m}\ \angle BAD.$$

Como se tiene la medida de $\angle DAC$, se despeja la medida del ángulo deseado. Por consiguiente,

$$\text{m}\ \angle BAD = \text{m}\ \angle BAC - \text{m}\ \angle DAC = 54° - 10° = 44°.$$

Opción correcta: A.

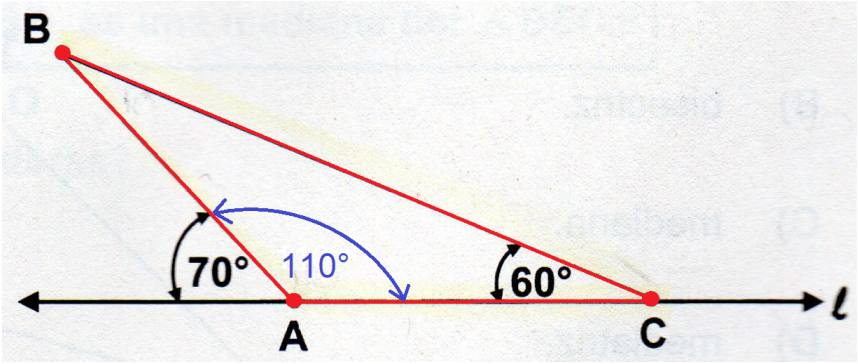

Figura 7: Pregunta 10

10 Para clasificar al △ ABC, en rojo, se deben conocer la medida de sus ángulos internos. Con la información dada, se conoce $\angle BCA$, y seguidamente, podemos averiguar $\angle BAC$, en azul, ya que se tiene su ángulo suplementario, de 70°. Entonces

$$\angle BAC + 70^\circ = 180^\circ \text{ que es equivalente a } \angle BAC = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ.$$

Así, uno de los ángulos del triángulo es obtuso (mide más de 90°), por lo tanto, el triángulo es obtusángulo. *Opción correcta*: D.

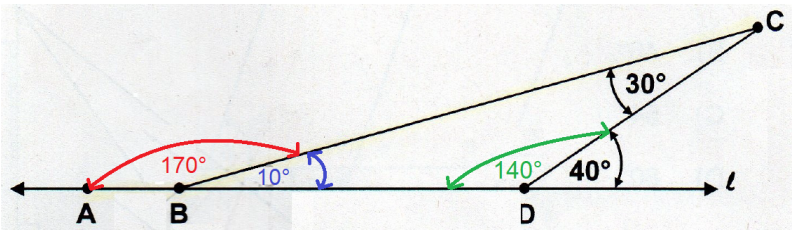

Figura 8: Pregunta 11

11 Para este ejercicio, es necesario apoyarse en el triángulo BCD, calculando sus ángulos internos. Primero, se puede averiguar $\angle BDC$ (en verde) al tener su suplementario, que mide 40°. Como su suma da un ángulo llano, entonces

$$\angle BDC = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ.$$

Una vez obtenido este valor, sigue calcular $\angle CBD$ (en azul). Como la suma de los ángulos internos △ BCD da un total de 180°, entonces

$$\text{m}\,\angle BDC + \text{m}\,\angle DCB + \text{m}\,\angle CBD = 180^\circ \text{ que es equivalente a } \text{m}\,\angle CBD = 180^\circ - \text{m}\,\angle BDC - \text{m}\,\angle DCB.$$

Reemplazando,

$$\text{m}\,\angle CBD = 180^\circ - 140^\circ - 30^\circ = 10^\circ.$$

Por último, como $\angle ABC$ (en rojo) es suplementario a $\angle BDC$, que mide 10°, entonces $\text{m}\,\angle ABC = 180^\circ - 10^\circ = 170^\circ$. *Opción correcta*: D.

12 Note que la recta no sale de ninguno de los vértices del tríangulo, es decir, de S, R o T. Por lo tanto, no puede ser una altura, mediana o bisectriz. Es una mediatriz, pues corta un lado del triángulo por la mitad en un ángulo recto. Este corresponde a $\overline{RT}$, ya que se indica que $\overline{RP} \cong \overline{PT}$ y además se muestra que en el punto de intersección P se forma un ángulo de 90°. *Opción correcta*: D.

13 La proposición I es correcta. Una mediatriz debe cortar por la mitad un lado del tríangulo y formar un ángulo recto. El lado de $\triangle$ DBF que corta es $\overline{DF}$ en el punto E. Se indica que $\overline{DE} \cong \overline{EF}$, por lo que es su punto medio. Además, se muestra que en el punto de intersección E se forma un ángulo de 90°.

La proposición II también es verdadera. La mediana debe pasar por un vértice, que en este caso es B, y dividir el lado que corta en 2. El lado de $\triangle$ BEC que interseca es $\overline{EC}$ en el punto F. Se indica que $\overline{EF} \cong \overline{FC}$, por lo que es su punto medio. *Opción correcta*: A.

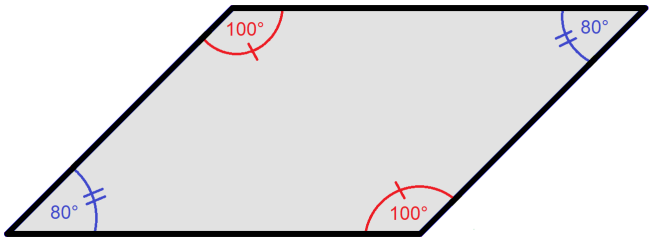

Figura 9: Pregunta 14

14 La proposición I es correcta. Son condiciones fundamentales de un paralelogramo. Sus lados opuestos son paralelos (puede recordarlo por el nombre) y estos son congruentes, es decir, miden lo mismo.

La proposición II es falsa. Por ejemplo, el romboide (ver figura 9), es un paralelogramo, pues sus lados opuestos miden lo mismo y son paralelos. Sin embargo, los ángulos internos no son rectos, son dos agudos (80°) y dos obtusos (100°). *Opción correcta*: C.

15 La figura mostrada es un cuadrilátero, por lo que sus ángulos internos la deben sumar 360°. Note que $\angle ABC$ es un ángulo interno, y se da la medida de los otros tres, que corresponden a $\angle BAD$ que mide 40°, $\angle ADC$ y $\angle BCD$, que son ángulos rectos (90°). Por lo tanto,

$$\angle ABC + \angle BAD + \angle ADC + \angle BCD = \angle ABC + 40° + 90° + 90° = 360°,$$

por lo que

$$\text{m } \angle ABC = 360° - 40° - 90° - 90° = 140°.$$

Opción correcta: C.

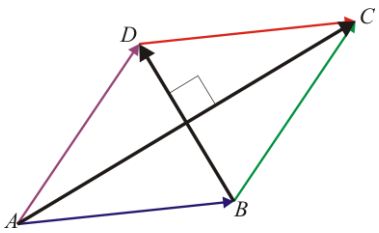

Figura 10: Pregunta 16

16 La proposición I es válida. Es una característica de esta figura geométrica, como se ve en la figura 10. Al cruzarse, las diagonales forman ángulos rectos.

La proposición II no es cierta. Si las diagonales fuesen congruentes, medirían lo mismo. Para lograr esto, el ancho y el largo del rectángulo deben tener la misma longitud. Esto convertiría a la figura en un cuadrado (los lados miden todos iguales). *Opción correcta*: C.

17 La proposición I es correcta. Una característica fundamental del cuadrado es que sus diagonales miden lo mismo. Las diagonales del cuadrado ABCD son $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ por lo que $\overline{AC} \cong \overline{BD}$.

La proposición II también es verdadera. Las diagonales de un cuadrado parten los ángulos internos, de 90°, a la mitad, en 45°. $\angle ABD$ y $\angle ACD$ son mitades de dos ángulos internos, $\angle ABC$ y $\angle BCD$, respectivamente, por lo que miden lo mismo. *Opción correcta*: A.

18 La proposición I es correcta. Una característica fundamental del rectángulo, al igual que del cuadrado, es que sus diagonales miden lo mismo. Las diagonales de $\square$ ABCD son $\overline{BD}$ y $\overline{AC}$ por lo que $\overline{BD} \cong \overline{AC}$.

La proposición II también es verdadera. El punto de intersección E de las diagonales del rectángulo las divide en partes iguales. Como las diagonales miden lo mismo, todas las mitades miden lo mismo. Así, vea que $\overline{BE}$ y $\overline{AE}$ son mitades de $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$, respectivamente, por lo que $\overline{BE} \cong \overline{AE}$. *Opción correcta*: A.

19 La paralela media del trapecio ABCD corresponde a $\overline{EF}$. Se calcula mediante la siguiente fórmula:

$$\frac{\text{Base mayor} + \text{Base menor}}{2} = \frac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2} = \overline{EF}.$$

Reemplazando con los valores dados,

$$\frac{40 + \overline{CD}}{2} = 28.$$

Despejando la ecuación,

$$40 + \overline{CD} = 28 \cdot 2 = 56,$$

entonces

$$\overline{CD} = 56 - 40 = 16.$$

Opción correcta: B.

20 $\overline{AB}$ es paralelo a $\overline{CD}$ al ser la base mayor y base menor de un trapecio. Así, $\overline{AB}$ es paralelo a toda la recta l, porque tiene la misma inclinación que $\overline{CD}$. Si toma $\overline{BD}$ como la línea que corta dos rectas paralelas, entonces $\angle ABD$ y $\angle BDC$ son ángulos colaterales internos. Al sumarlos, debe dar 180°. Por lo tanto,

$$\text{m}\ \angle ABD + \text{m}\ \angle BDC = \text{m}\ \angle ABD + 58° = 180°.$$

Por consiguiente,

$$\text{m } \angle ABD = 180^\circ - 58^\circ = 122^\circ.$$

Opción correcta: B.

21 Los números naturales $\mathbb{N}$ son positivos $(0, 1, 2, \dots)$, por lo que -3 no pertenece al conjunto, por lo que la proposición I es incorrecta. Por otro lado, 4 sí es un entero positivo, por lo que pertenece a $\mathbb{Z}^+$; la proposición II es verdadera. *Opción correcta*: D.

22 Los números naturales $\mathbb{N}$ son todos los enteros positivos $\mathbb{Z}^+$, que corresponden a $1, 2, \dots$, pero también el 0, por lo que la proposición I es cierta.

La proposición II es falsa. Los números enteros $\mathbb{Z}$ incluyen los enteros positivos $\mathbb{Z}^+$ y los enteros negativos $\mathbb{Z}^-$, pero también el 0, el cual no se encuentra en la igualdad. *Opción correcta*: C.

23 La proposición I es correcta ya que el valor absoluto modifica los números negativos y los convierten en positivos. Así $|-3| = 3$, por lo que es un entero positivo, es decir, pertenece a $\mathbb{Z}^+$.

La proposición II es falsa puesto que $|0| = 0$, que no es ni positivo ni negativo. Por lo tanto, no es un entero positivo $\mathbb{Z}^+$. *Opción correcta*: C.

24 Si x es un número real, su opuesto es $-x$. En este caso, el opuesto de $-a$ es $-(-a) = --a = a$, por ley de signos. *Opción correcta*: A.

25 El antecesor de a es el número inmediatamente anterior, es decir $a - 1$. Entonces el antecesor de 0 es $0 - 1 = -1$. La proposición I es verdadera.

El sucesor de a es el número inmediatamente posterior, es decir $a + 1$. Entonces el sucesor de -4 es $-4 + 1 = -3$. La proposición II es falsa. *Opción correcta*: C.

Figura 11: Pregunta 26

26 Considere la recta numérica mostrada en la figura 11. Vea, por ejemplo, que el mayor número es 9 y el menor es -9. Las siguientes opciones son incorrectas:

A) $\{3, 5, 1, 0\}$: el primer número es menor que el segundo $(3 < 5)$.

B) $\{0, 2, 4, 6\}$: el primer número es menor que el segundo $(0 < 2)$.

D) $\{0, 2, 4, 6\}$: el primer número es menor que el segundo $(-9 < -7)$. Para corroborarlo, puede multiplicar a ambos lados de la desigualdad, lo que cambia su dirección. Es decir, $-9 < -7$ es la misma expresión que $9 < 7$, que es más fácil de observar.

La respuesta correcta es $\{-1, -3, -6, -9\}$, pues $-1 > -3 > -6 > -9$. Aplicando lo explicado en el inciso D, esa desigualdad equivale a $1 < 3 < 6 < 9$, la cual es cierta. *Opción correcta*: C.

27 La proposición I es correcta. Para corroborarlo puede multiplicar por -1 a ambos lados de la desigualdad para llegar a una expresión equivalente que es más fácil de ver. Esto hace que la desigualdad cambie de dirección. Entonces $0 > -400$ implica que $0 < 400$ lo cual es cierto.

La proposición II también es correcta. Aplicando lo explicado anteriormente, $-15 < -2$ es equivalente a que $15 > 2$, que es verdadero. *Opción correcta*: A.

28 La suma de un número negativo es lo mismo que restar ese número al otro sumando. Entonces

$$24 + -4 = 24 - 4 = 20.$$

Opción correcta: A.

29 La resta de un número negativo es una suma. Por lo tanto, puede cambiarlos signos $--$ por el de suma $+$. Así, en la primera proposición $-4 - -3 = -4 + 3$. Luego, puede intercambiar ambos números y resulta en una resta, $-4 + 3 = 3 - 4 = -1$. Entonces la proposición I es correcta.

La proposición II es incorrecta. Aplicando lo explicado anteriormente, $5 - -4 = 5 + 4 = 9$. *Opción correcta*: C.

30 Se realizan las multiplicaciones de izquierda a derecha, dos números a la vez. La primera corresponde a $-2 \cdot -5$. Por ley de signos, el producto de dos números negativos es positivo, entonces $-2 \cdot -5 = --2 \cdot 5 = 10$. A este resultado se le multiplica el siguiente (3), entonces

$$-2 \cdot -5 \cdot 3 = 10 \cdot 3 = 30.$$

Por último, se multiplica el -1. Cuando se realiza el producto de un número negativo por uno positivo, el resultado es negativo, por consiguiente,

$$-2 \cdot -5 \cdot 3 \cdot -1 = 30 \cdot -1 = -30 \cdot -1 = -30.$$

Opción correcta: D.

31 Por ley de signos, la división entre un número negativo y otro positivo da como resultado un valor negativo. De esta manera, solo basta dividir 130 entre 5, que corresponde a 26, entonces

$$-130 \div 5 = -(130 \div 5) = -26.$$

Opción correcta: C.

32 Como la división y la multiplicación tiene la misma prioridad, se realizan las operaciones de izquierda a derecha. Primero la división, la cual es negativa por ley de signos, así,

$$-18 \div 3 = -(18 \div 3) = -6.$$

A este resultado se le multiplica el número restante (-2). Al ser ambos negativos, el producto es positivo. De esta manera,

$$-18 \div 3 \cdot -2 = -6 \cdot -2 = - - 6 \cdot 2 = 6 \cdot 2 = 12.$$

Opción correcta: C.

33 Se efectúa primero la operación entre paréntesis ( ). Es una división de un número positivo entre otro negativo, por lo que el resultado es negativo. Así,

$$4 \div -2 = -4 \div 2 = -2.$$

Luego, sigue la resta que está entre corchetes [ ], entonces

$$3 - (4 \div -2) = 3 - -2 = 3 + 2 = 5$$

Por último, se aplica la multiplicación (cuando un valor está acompañando un paréntesis o un corchete sin ningún signo, se asume que hay una multiplicación). Por lo tanto,

$$3[3 - (4 \div -2)] = 3 \cdot 5 = 15.$$

Opción correcta: D.

34 Se efectúa primero la operación entre paréntesis ( ), que corresponde a $-4 + 3 \cdot 2$. De aquí, en primer lugar se hace la multiplicación y luego la suma. De esta forma,

$$-4 + 3 \cdot 2 = -4 + 6 = 6 - 4 = 2.$$

Sigue la división

$$24 \div (-4 + 3 \cdot 2) = 24 \div 2 = 12.$$

En última instancia, la resta. En conclusión,

$$24 \div (-4 + 3 \cdot 2) - 12 = 12 - 12 = 0.$$

Opción correcta: A.

35 La proposición I es verdadera. Note que ambos números tienen la misma base y el mismo exponente, por lo que son el mismo valor. Cuando se divide un número por sí mismo, el resultado es 1. Otra forma de verlo es que, al tener la misma base y estar dividiéndose, los exponentes se restan. De esta manera,

$$a^3 \div a^3 = a^{3-3} = a^0$$

Cualquier número elevado a 0 es 1. La proposición II es falsa. El exponente de la expresión es 2 y su base es 4, no -4. Entonces primero se aplica la potencia y luego se coloca el signo. Así,

$$-4^2 = -(4^2) = -16.$$

Opción correcta: C.

36 Ambos números tienen la misma base (3). Al estar multiplicándose, se mantiene la base y se suman los exponentes. Por lo tanto,

$$3^{50} \cdot 3^{51} = 3^{50+51} = 3^{101}.$$

Opción correcta: B.

37 Se realiza la operación entre paréntesis ( ) y luego la división. Entre paréntesis se encuentra $7^2 \div 7^5$. Ambos números tienen la misma base (3). Al estar multiplicándose, se mantiene la base y se suman los exponentes. Entonces,

$$7^2 \cdot 7^5 = 7^{2+5} = 7^7.$$

A este valor se divide 7^4. En la división, en vez de sumar, se restan los exponentes. Así,

$$(7^2 \cdot 7^5) \div 7^4 = 7^7 \div 7^4 = 7^{7-4} = 7^3.$$

Opción correcta: A.

38 Primero se realizan las operaciones entre paréntesis ( ). Estas corresponden a $10 - 7 = 3$ y $20 \div -4 - 2$. En est última, se realiza primero la división y se aplica la ley de signos. Seguidamente, la resta, entonces

$$20 \div -4 - 2 = -(20 \div 4) - 2 = -5 - 2 = -7.$$

Luego, van las potencias, que corresponden a $(10 - 7)^2 = 3^2 = 9$ y $(20 \div -4 - 2)^2 = (-7)^2 = 7^2 = 49$. Recuerde que un número negativo elevado a un número par da un resultado positivo. Por último, se efectúa la resta. En conclusión,

$$(10 - 7)^2 - (20 \div -4 - 2)^2 = 9 - 49 = -(49 - 9) = -40.$$

Opción correcta: D.

39 Se necesita que la variable n no esté dividiendo o multiplicando ningún número. En este caso, está dividiendo a -55. Para modificar la expresión, la variable n pasa al otro lado de la igualdad a multiplicar (operación inversa). Entonces

$$-55 \div n = 11 \text{ es equivalente a } -55 = 11n.$$

Luego, vamos a despejar el 11 que multiplica a n. Para ello, se pasa el 11 a dividir al otro lado. De esta forma,

$$-55 = 11n \text{ es equivalente a } -55 \div 11 = n.$$

Ya se tiene que n debe ser $-55 \div 11 = -5$. *Opción correcta*: C.

40 El valor que suma del lado de la variable a en la ecuación, pasa a restar al lado opuesto. Entonces $-9 + a = -4$ implica que $a = -4 - -9 = -4 + 9 = 9 - 4 = 5$. *Opción correcta*: A. *Opción correcta*: D.

41 Se efectúa la división $18 \div 8$, la cual da $2,25$. *Opción correcta*: A.

42

Observación 1. Sean a, b, c tres números enteros. Entonces $a\frac{b}{c} = \frac{a \cdot c + b}{c}$.

En este ejercicio $a = -5$, $b = 3$ y $c = 7$. Entonces,

$$-5\frac{3}{7} = \frac{-5 \cdot 7 + 3}{7} = \frac{-35 + 3}{7} = \frac{-32}{7}.$$

Opción correcta: C.

43 La proposición I es falsa. Se lee que los números enteros $\mathbb{Z}$ están incluidos en los racionales positivos $\mathbb{Q}^+$. Sin embargo, en los enteros están números negativos, que no se encuentran en los racionales positivos.

La proposición II es cierta. Se lee que los números naturales $\mathbb{N}$ están incluidos en los racionales, lo cual es verdadero ya que todo natural se puede escribir como una fracción. Si a es un número natural, $a = \frac{a}{1}$. Por ejemplo, $10 = \frac{10}{1}$. *Opción correcta*: D.

44 Primero, pasamos el número mixto a fracción, usando la Observación 1 (pregunta 42). Así,

$$1\frac{5}{7} = \frac{1 \cdot 7 + 5}{7} = \frac{7+5}{7} = \frac{-12}{7}.$$

Luego, se debe recordar que si x es un número real, su opuesto es $-x$, por lo que el opuesto de $1\frac{5}{7}$ es $\frac{12}{7}$. *Opción correcta*: D.

45

Observación 2. Si a, b, c, d números positivos, entonces $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ equivale a $a \cdot d < b \cdot c$. Válido también con $>$ y $=$.

La proposición I es incorrecta. Considerando la observación 2, tome $a = 1, b = 2, c = 1$ y $d = 8$. Así,

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{8} \text{ equivale a } 8 < 2 \text{ lo cual es falso.}$$

La proposición II es cierta. La fracción a la izquierda de la igualdad está simplificada al máximo, la de la derecha, que corresponde a $\frac{15}{20}$, no lo está. Note que, tanto numerados como denominador son divisibles entre 5, al terminar en 5 o 0. Entonces,

$$\frac{15}{20} = \frac{15 \div 5}{20 \div 5} = \frac{3}{4}.$$

Opción correcta: D.

46

Observación 3. Sean a, b, c, d números reales. Entonces, $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{c \cdot d}$ y $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d - b \cdot c}{c \cdot d}$.

Usando la primera igualdad, con $a = 15$, $b = 30$, $c = -3$ y $d = 2$, se tiene que

$$\frac{15}{30} + \frac{-3}{2} = \frac{15 \cdot 2 + -3 \cdot 30}{2 \cdot 30} = \frac{30 - 90}{60} = \frac{-60}{60} = -60 \div 60 = -1.$$

Opción correcta: C.

47 Usando la segunda igualdad de la Observación 3 (pregunta 46), con $a = 7$, $b = 5$, $c = 1$ y $d = 3$, se tiene que

$$\frac{7}{5} - \frac{1}{3} = \frac{7 \cdot 3 - 5 \cdot 1}{5 \cdot 3} = \frac{21 - 5}{15} = \frac{16}{15}.$$

Opción correcta: D.

48

Observación 4. Sean x, y, z, w números reales. Entonces, $\dfrac{\frac{x}{y}}{\frac{z}{w}} = \dfrac{x \cdot w}{y \cdot w}$.

En este ejercicio, tome $x = -5, y = 3, z = -1$ y $w = 2$. Entonces,

$$\frac{\frac{-5}{3}}{\frac{-1}{2}} = \frac{-5 \cdot 2}{3 \cdot -1} = \frac{-10}{-3} = \frac{10}{3},$$

aplicando la ley de signos en la fracción (los menos se cancelan). *Opción correcta*: B.

49 Primero se pasa el número mixto a fracción. De acuerdo con la Observación 1 (pregunta 42),

$$-3\frac{1}{2} = \frac{-3 \cdot 2 + 1}{2} = \frac{-6 + 1}{2} = \frac{-5}{2}.$$

Luego, se convierte la expresión decimal a fracción. Como tiene dos decimales, se corre la come dos posiciones y se divide por 100 (un cero por cada desplazamiento de la coma). Así, $0,25 = \dfrac{25}{100}$. Tanto el denominador como el numerador son divisibles por 25 (puede ver, en primer lugar, que son divisibles por 5 al terminar en 5 o en 0 y este hecho se repite 3 veces). Entonces,

$$0,25 = \frac{25}{100} = \frac{25 \div 25}{100 \div 25} = \frac{1}{4}.$$

Combinando ambos resultados, se procede a multiplicar de forma lineal (numerador con numerados y denominador con denominador). Por lo tanto,

$$-3\frac{1}{2} = \frac{-3 \cdot 2 + 1}{2} \cdot 0,25 = \frac{-5}{2}\frac{1}{4} = \frac{-5 \cdot 1}{2 \cdot 4} = \frac{-5}{8}.$$

Opción correcta: B.

50 Primero se sustituye el exponente negativo (-2) por su opuesto positivo (2) invirtiendo la fracción. Entonces,

$$\left(\frac{-3}{2}\right)^{-4} = \left(\frac{2}{-3}\right)^{4} = \left(\frac{-2}{3}\right)^{4}.$$

Luego, se eleva tanto el numerador como el denominador por el exponente, entonces

$$\left(\frac{-3}{2}\right)^{-4} = \left(\frac{-2}{3}\right)^{4} = \frac{(-2)^4}{3^4} = \frac{16}{81}.$$

Recuerde que un número negativo elevado con un exponente par convierte el resultado en positivo, por eso $(-2)^4 = 2^4 = 16$. *Opción correcta*: C.

51 Primero, pasamos la expresión decimal a una fracción. Para ello, se "corre" la coma y se divide entre 10 (se coloca solo un 0 porque solo tiene un decimal). Luego se simplifica. Entonces,

$$1,5 = \frac{15}{10} = \frac{15 \div 5}{10 \div 5} = \frac{3}{2}.$$

Así, se sabe que

$$[(1,5)^{-2}]^2 = \left[\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}\right]^2.$$

Cuando se eleva un número que ya tiene un exponente, se conserva esta base y se multiplican ambos exponentes. De esta manera,

$$\left[\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}\right]^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^{-2\cdot 2} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-4}.$$

Seguidamente, se sustituye el exponente negativo (-24) por su opuesto positivo (4) invirtiendo la fracción. Entonces,

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{-4} = \left(\frac{2}{3}\right)^{4}.$$

Luego, se eleva tanto el numerador como el denominador por el exponente, entonces

$$[(1,5)^{-2}]^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2^4}{3^4} = \frac{16}{81}.$$

Opción correcta: B.

52 Recuerde las siguientes propiedades de los exponentes:

1. Si a, b y n son números reales, entonces $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$.
2. Si c, d y w son números reales, entonces $u^v \cdot u^w = u^{w+v}$.
3. Si x, y y z son números reales, entonces $(x^y)^z = x^{y\cdot z}$.

La proposición I es correcta. Se cumple la propiedad 1 tomando $a = \dfrac{5}{3}$, $b = \dfrac{4}{5}$ y $n = 3$.

La proposición II es incorrecta. Del lado izquierdo de la igualdad, de la propiedad 2, tome $u = \dfrac{5}{3}$, $v = 5$ y $w = 8$, entonces

$$\left(\frac{5}{3}\right)^5 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^8 = \left(\frac{5}{3}\right)^{5+8} = \left(\frac{5}{3}\right)^{13}.$$

Por el otro lado, vea que $\dfrac{25}{9}$ se puede escribir como $\dfrac{5^2}{3^2} = \left(\dfrac{5}{3}\right)^2$. Por lo tanto, se puede aplicar la tercera propiedad. Tome $x = \dfrac{5}{3}$, $y = 2$ y $z = 40$. Entonces,

$$\left(\frac{25}{9}\right)^{40} = \left[\left(\frac{5}{3}\right)^2\right]^{40} = \left(\frac{5}{3}\right)^{4\cdot 20} = \left(\frac{5}{3}\right)^{80}.$$

Aunque ambos tienen la misma base, tienen diferente exponente. Por consiguiente, son números diferentes. *Opción correcta*: C.

55 Se realizan primero las operaciones entre paréntesis ( ). Usando la Observación 3 (pregunta 46), se tiene que

$$\frac{5}{2} - \frac{3}{4} = \frac{5\cdot 4 - 3\cdot 2}{2\cdot 4} = \frac{20-6}{8} = \frac{14}{8} = \frac{14 \div 2}{8 \div 2} = \frac{7}{4}$$

que se pudo simplificar al ser tanto el denominador como el numerador pares. Seguidamente,

$$\frac{-2}{3} - \frac{1}{6} = \frac{-2 \cdot 6 - 3 \cdot 1}{3 \cdot 6} = \frac{-12 - 3}{18} = \frac{-15}{18} = \frac{-15 \div 3}{18 \div 3} = \frac{-5}{6}.$$

Combinando ambos resultados,

$$\left(\frac{5}{2} - \frac{3}{4}\right) - \left(\frac{-2}{3} - \frac{1}{6}\right) = \frac{7}{4} - \frac{-5}{6} = \frac{7 \cdot 6 - -5 \cdot 4}{4 \cdot 6} = \frac{42 + 20}{36} = \frac{62}{24}.$$

Simplificando

$$\left(\frac{5}{2} - \frac{3}{4}\right) - \left(\frac{-2}{3} - \frac{1}{6}\right) = \frac{62}{24} = \frac{62 \div 2}{24 \div 2} = \frac{31}{12}.$$

Opción correcta: B.

Solucionario

Matemática I Térraba 2013

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B	B	A	C	A	C	A	A	A	D

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
D	D	A	C	C	C	A	A	B	B

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
D	C	C	A	C	C	A	A	C	D

31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
C	C	D	A	C	B	A	D	C	D

41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
A	C	D	D	D	C	D	B	B	C

51	52	53	54	55
B	C	-	-	B