Solucionario

Matemática I Térraba 2011

Elaborado por: José Alberto Cordón Camacho.

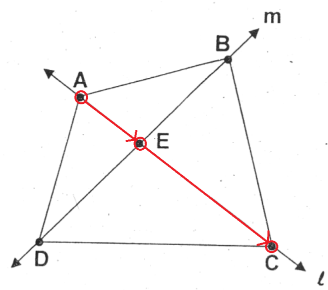

Figura 1: Pregunta 1

1 Tres puntos son colineales si se ubican en la misma recta. Gráficamente, si se conectan deben formar una línea recta. Si une, por ejemplo, A, B y C, se forma un triángulo, por lo que no son colineales. De las opciones dadas, los únicos puntos que forman una recta son A, E y C, como se muestra en la figura 1. *Opción correcta*: D.

2 La proposición I no es cierta. Dos rectas son concurrentes si ambas se intersecan o cruzan en un punto. En este caso, las líneas l_1 y l_2 son paralelas. Se puede comprobar porque, al ser cortadas por l_3, los ángulos correspondientes son ambos de 90°. Al ser paralelas, nunca se intersecan.

La proposición II es verdadera. En el punto de intersección entre l_1 y l_2 se formó un ángulo de 90°, por lo que son perpendiculares. *Opción correcta*: D.

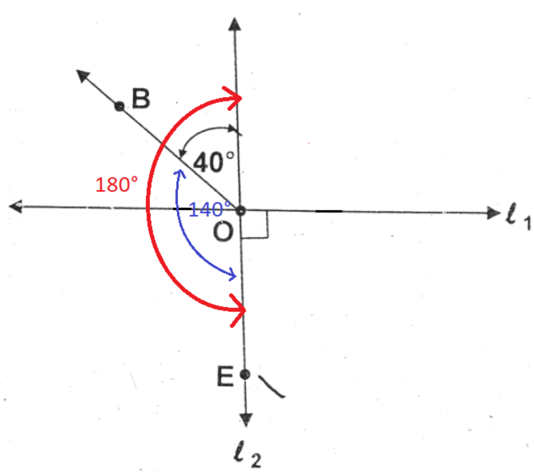

Figura 2: Pregunta 2

3 El ángulo $\angle BOE$ se muestra en azul en la figura 2. Se puede notar que este ángulo es suplementario a $40°$, es decir, sumado a $40°$ debe dar $180°$ (mostrado en rojo en la figura). Por lo tanto, se cumple que

$$\text{m } \angle BOE + 40° = 180°.$$

Entonces,

$$\text{m } \angle BOE = 180° - 40° = 140°.$$

Opción correcta: D.

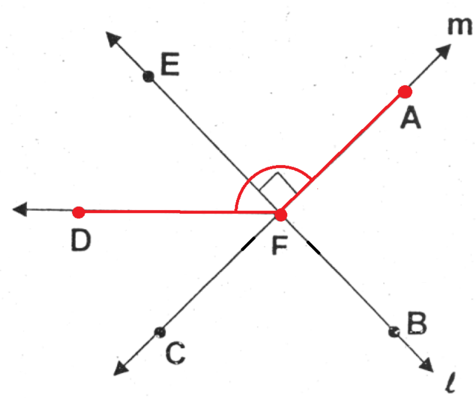

Figura 3: Pregunta 4

4 Las siguientes opciones no son correctas:

A) $\angle AFE$: es un ángulo recto, mide $90°$.

B) $\angle EFD$: es agudo, mide menos de $90°$.

D) $\angle DFC$: es agudo, mide menos de $90°$.

El ángulo obtuso es $\angle AFD$, como se muestra en rojo en la figura 3. Note que es la suma del ángulo recto $\angle AFE$ más el agudo $\angle EFD$, por lo que mide más de $90°$. *Opción correcta*: C.

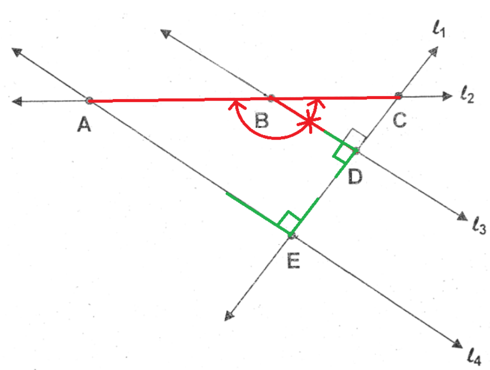

Figura 4: Pregunta 5

5 La proposición I es correcta. Los ángulos $\angle ABD$ y $\angle CBD$ se muestran en rojo en la figura 4. Al sumar ambos, se completan 180°, por lo que son suplementarios.

La proposición II es falsa. Los ángulos $\angle AED$ y $\angle BDE$ se muestran en verde. Ambos miden 90°, por lo que al sumarlos da 180°, por lo cual no pueden ser complementarios (los complementarios deben sumar 90°). *Opción correcta*: C.

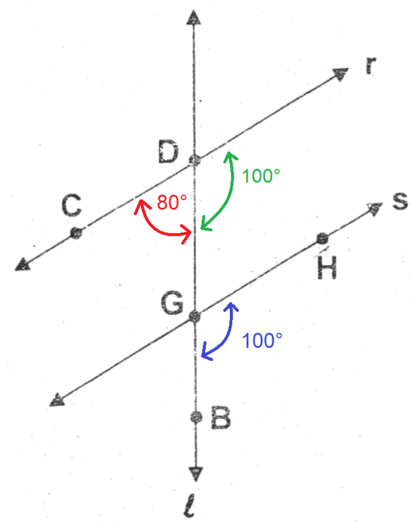

Figura 5: Pregunta 6

6 Note que el ángulo $\angle CDG$, en rojo, es suplementario al ángulo verde. Como ambos deben sumar 180° y $\angle CDG$ mide 80°, el ángulo verde mide 100°. Como la línea r es paralela a s, se puede afirmar que el ángulo verde y el ángulo $\angle BGG$ (en azul) son correspondientes, por lo que miden lo mismo. Entonces $\angle BGG$ mide 100°. *Opción correcta*: D.

7 En primera instancia, los ángulos alternos internos deben encontrarse entre las dos líneas paralelas que definen la figura. Por lo tanto, no pueden ser α, β, λ ni δ. Además, deben estar en distinto lado de la transversal n y no ser adyacentes (estar a la par). Note que, en la opción C, π y μ están del mismo lado de la transversal, por lo que no son alternos. Así, los ángulos que cumplen las condiciones descritas son ξ y π. *Opción correcta*: B.

8 Los lados de un triángulo deben cumplir la desigualdad triangular, es decir, la suma de dos lados tiene que ser superior a la longitud del tercero. Si a, b, c son los lados de un triángulo, entonces $a+b > c$, $a+c > b$ y $b+c > a$. Las opciones incorrectas son:

A) $5+1=6$.

B) $3+4=7$.

D) $2+2=4 \leq 8$.

La opción C cumple todas las condiciones, pues $10+8=18 > 4$, $8+4=12 > 10$ y $10+4=14 > 8$. *Opción correcta*: C.

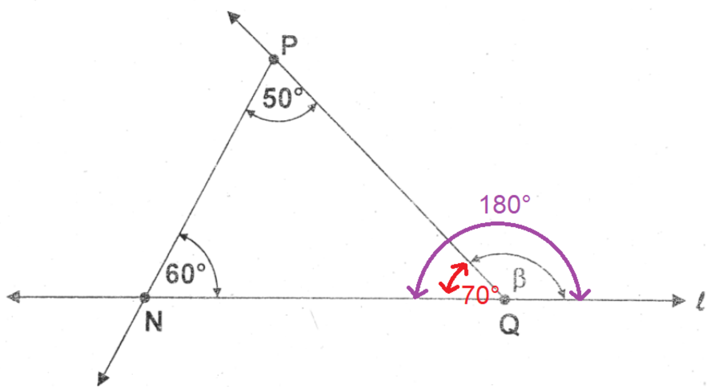

Figura 6: Pregunta 9

9 Para conocer el valor de β, se puede primero calcular cuánto mide el ángulo $\angle PQN$ (en rojo), ya que forma parte del triángulo PNQ. Dado que los tres ángulos de un triángulo suman 180°, entonces

$$\text{m } \angle NPQ + \text{m } \angle PQN + \text{m } \angle QNP = 180^\circ.$$

Reemplazando de los datos proporcionados en la figura,

$$50^\circ + \text{m } \angle PQN + 60^\circ = 180^\circ,$$

entonces

$$\text{m } \angle PQN = 180^\circ - 50^\circ - 60^\circ = 70^\circ.$$

Una vez calculado este valor, observe que $\angle PQN$ es suplementario a β, por lo que al sumar ambos debe dar 180°, es decir, m $\angle PQN + \beta = 180^\circ$. Resolviendo la ecuación,

$$\beta = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ.$$

Opción correcta: B.

10 Vea que $\angle CBA$ es uno de los ángulos internos de $\triangle$ ABC. Los otros dos ya son proporcionados: m $\angle BAC = 45^\circ$ y m $\angle BCA = 30^\circ$. Estos tres ángulos suman 180°, por lo que

$$45^\circ + 30^\circ + \text{m } \angle CBA = 180^\circ,$$

entonces

$$\text{m } \angle CBA = 180^\circ - 45^\circ - 30^\circ = 105^\circ.$$

Opción correcta: D.

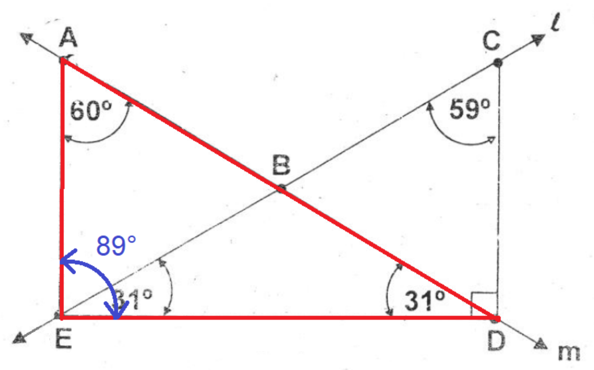

Figura 7: Pregunta 11

11 El $\triangle$ AED es el remarcado en rojo. Son brindados dos de sus ángulos internos: m $\angle EAD = 60°$ y m $\angle EAD = 31°$. El restante es $\angle AED$, el cual, sumado a los dos anteriores, da como resultado 180°. Entonces,

$$\text{m } \angle AED = 180° - 60° - 31° = 89°.$$

Como todos sus ángulos internos son agudos (miden menos de 90°), $\triangle$ AED es acutángulo.
Opción correcta: B.

12 Las siguientes opciones no se pueden asegurar:

A) $\overline{BE}$ es la altura: no se especifica si $\overline{BE}$ es perpendicular al lado $\overline{AD}$.

C) $\overline{AC}$ es la bisectriz: no se conoce si esta recta corta el ángulo $\angle BAE$ en dos iguales.

D) $\overline{AC}$ es la mediana: no se sabe si C es el punto medio de $\overline{BD}$.

Sí se puede decir que $\overline{BE}$ es la mediana, ya que, como $\overline{AE} \cong \overline{ED}$ (miden lo mismo), E es el punto medio del lado $\overline{AD}$. Así, $\overline{BE}$ va desde un vértice del triángulo hasta el punto medio del lado opuesto.
Opción correcta: B.

13 Las siguientes opciones no se pueden asegurar:

A) $\overline{QR} \cong \overline{RP}$: no se conoce si R es el punto medio del lado $\overline{QP}$.

B) $\overline{QM} \cong \overline{MP}$: no hay datos sobre los ángulos $\angle MQP$ y $\angle QPM$ ni sobre los lados del triángulo para asegurar que $\overline{QM}$ y $\overline{MP}$ midan lo mismo.

C) $\angle QRM \cong \angle PRM$: al ser suplementarios, la igualdad se da si y solo si ambos ángulos son rectos, lo cual no se especifica.

Sí es seguro que $\angle QMR$ y $\angle PMR$ miden lo mismo. Como $\overline{MR}$ es bisectriz del $\angle QMP$, divide este ángulo en partes iguales, que corresponden a $\angle QMR$ y $\angle PMR$. *Opción correcta*: D.

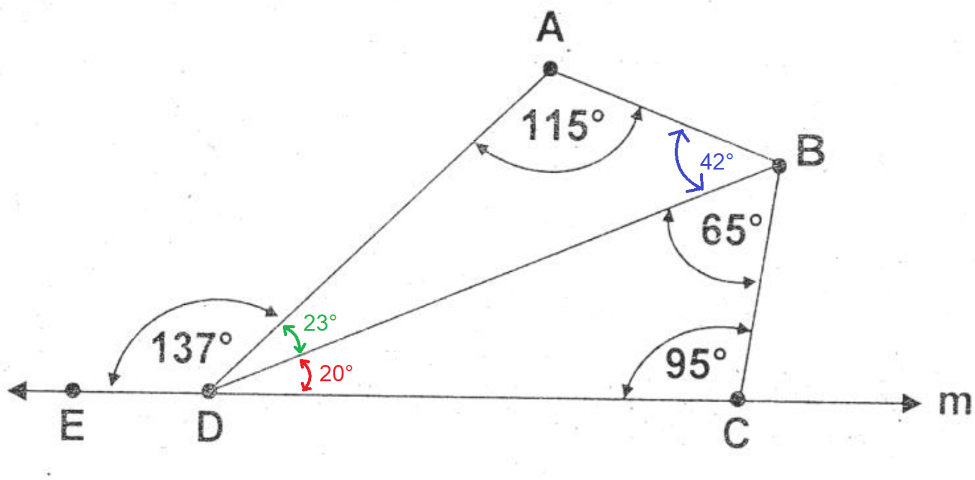

Figura 8: Pregunta 14

14 Para averiguar la medida de $\angle ABD$ (en azul), será necesario conocer la medida de los ángulos $\angle BDC$ (en rojo) y $\angle ADB$ (en verde). El primero, como forma parte del triángulo DBC y se tiene información de dos de sus ángulos internos, se puede calcular al conocer que la suma de los ángulos internos de un triángulo da 180°. Entonces,

$$\mathrm{m}\ \angle BDC + 65^\circ + 95^\circ = 180^\circ \text{ es equivalente a } \mathrm{m}\ \angle BDC = 180^\circ - 65^\circ - 95^\circ = 20^\circ.$$

Con este resultado, se puede calcular m $\angle ADB$, puesto que, al sumarlo junto con $\angle EAD$ y $\angle BDC$, se obtiene un ángulo llano. Así, m $\angle EAD +$ m $\angle ADB +$ m $\angle BDC = 180^\circ$. Reemplazando,

$$137^\circ + \mathrm{m}\ \angle ADB + 20^\circ = 180^\circ \text{ es equivalente a } \mathrm{m}\ \angle ADB = 180^\circ - 137^\circ - 20^\circ = 23^\circ.$$

Por último, se puede conocer el valor de $\angle ABD$, al formar parte del triángulo $\triangle ADB$. Aplicando la propiedad de los triángulos como antes, se puede corroborar que $\angle BAD + \angle ADB + \angle BDC = 180^\circ$. Reemplazando,

$$65^\circ + 95^\circ + \mathrm{m}\ \angle BDC = 180^\circ \text{ es equivalente a } \mathrm{m}\ \angle BDC = 180^\circ - 65^\circ - 95^\circ = 20^\circ.$$

Opción correcta: A.

15 Por definición, en un paralelogramo los lados opuestos son paralelos, por lo que la proposición I es cierta. Además, los lados opuestos miden lo mismo, que es equivalente a decir que son congruentes. Por lo tanto, ambas proposiciones son correctas. *Opción correcta*: A.

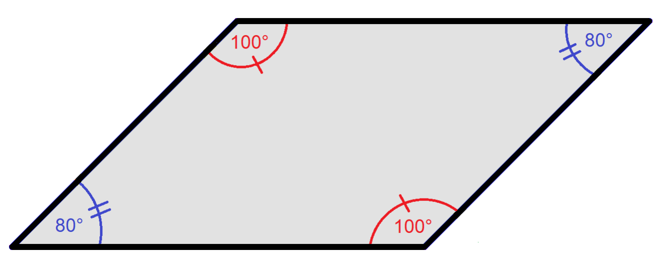

Figura 9: Pregunta 16

16 El romboide al ser un paralelogramo, los ángulos internos opuestos miden lo mismo. Se dice que uno de ellos mide 80, por lo que el opuesto también mide 80°, como se ve en la figura 9, en azul. Así mismo, la suma de los ángulos internos de cualquier paralelogramo es de 360°. Si restamos a este valor la medida de los dos ángulos, da como resultado $360° - 80° - 80° = 200°$. Este número es la suma de los restantes dos ángulos, en rojo. Como miden lo mismo al ser opuestos, para conocer el valor de uno basta con dividir los 200° entre dos. Por lo tanto, la medida del otro ángulo interno es $200° \div 2 = 100°$. *Opción correcta*: B.

17 En la proposición I, el punto E divide a la mitad las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ del rombo. Por lo tanto, $\overline{AE}$ mide la mitad de $\overline{AC}$ y $\overline{ED}$ la mitad de $\overline{BD}$. En un rombo las diagonales no son congruentes (no miden lo mismo), por lo que estas mitades tampoco deberían medir igual.

La proposición II es correcta. El rombo, al ser un paralelogramo, cumple que los ángulos internos opuestos miden lo mismo. Como $\angle ABC$ y $\angle ADC$ son opuestos, son congruentes. Además, $\overline{BD}$ es su bisectriz, por lo que los ángulos que forma miden lo mismo (la bisectriz divide los ángulos en partes iguales). Por ello, $\angle ABD \cong \angle DBC$, que son mitades de $\angle ABC$ y $\angle ADC$ respectivamente. *Opción correcta*: D.

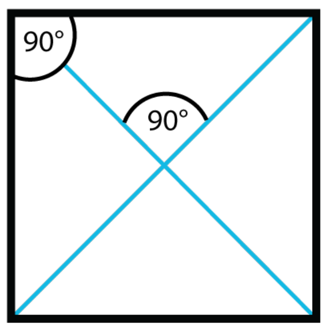

Figura 10: Pregunta 18

18 Ambas proposiciones son ciertas, pues son características de un cuadrado. Las diagonales se cortan en el centro de la figura, y forman ángulos rectos, por lo que son perpendiculares. Además, los lados miden lo mismo, por lo que las diagonales pueden verse como hipotenusas de triángulos rectángulos isósceles, del mismo tamaño; es decir, son congruentes. *Opción correcta*: A.

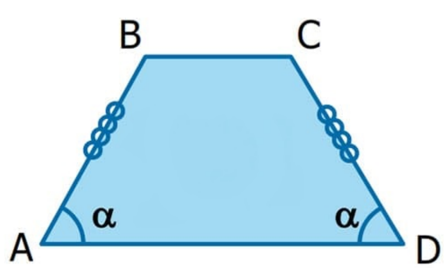

Figura 11: Pregunta 19

19 El cuadrilátero descrito es un trapecio isósceles. Dos de sus lados son paralelos. En la figura 11 serían $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$. Los otros lados, $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, no son paralelos, pero son congruentes, es decir, miden lo mismo. *Opción correcta*: B.

20 La paralela media del trapecio ABCD corresponde a $\overline{EF}$. Se calcula mediante la siguiente fórmula:

$$\frac{\text{Base mayor} + \text{Base menor}}{2} = \frac{\overline{AD} + \overline{BC}}{2} = \overline{EF}.$$

Reemplazando con los valores dados,

$$\frac{18 + \overline{BC}}{2} = 16.$$

Despejando la ecuación,

$$18 + \overline{BC} = 16 \cdot 2 = 32,$$

entonces

$$\overline{BC} = 32 - 18 = 14.$$

Opción correcta: C.

21 Un subconjunto de $\mathbb{Z}^-$ incluye números enteros negativos. Las opciones erróneas son:

A) $\{-1, 0, 1\}$: ni 0 ni 1 son negativos.

B) $\{-2, -1, 0\}$: 0 no es negativo.

D) $\{-2, -1, 1, 2\}$: 1 y 2 son positivos.

En la opción C, los tres números, $-3, -2$ y -1, son negativos y enteros. *Opción correcta*: C.

22 La primera proposición es correcta. Los números enteros ($\mathbb{Z}$) incluye a los enteros negativos ($\mathbb{Z}^-$), los enteros positivos ($\mathbb{Z}^+$) y el cero ($\{0\}$), por lo que este conjunto es la unión de los tres subconjuntos. La segunda proposición también es cierta. Los naturales ($\mathbb{N}$) incluyen el cero ($\{0\}$) y los enteros positivos ($\mathbb{Z}^+$), por lo que $\mathbb{N} = \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$. Reemplazando, se obtiene la misma expresión de la proposición I.
Opción correcta: A.

23 Si a es un número real, su opuesto es $-a$. En este caso, el opuesto de -23 es $-(-23) = - - 23 = 23$ por ley de signos. *Opción correcta*: A.

24 La proposición I es correcta ya que el valor absoluto no modifica al 0 ni a los números positivos. La proposición II es falsa puesto que -8 es un número negativo, por lo que $|-8|$ es su opuesto, es decir, 8. De esta forma, $-|-8| = -8$. *Opción correcta*: C.

25 El antecesor de a es el número inmediatamente anterior, es decir $a - 1$. Entonces el antecesor de -214 es $-214 - 1 = -215$. *Opción correcta*: D.

26 La proposición I es incorrecta. Para corroborarlo puede multiplicar por -1 a ambos lados de la desigualdad. Esto hace que la desigualdad cambie de dirección. Entonces $-3 > -2$ implica que $3 < 2$ lo cual no es cierto. La proposición II es correcta. Aplicando lo explicado anteriormente, $-100 < -99$ es equivalente a que $100 > 99$. *Opción correcta*: D.

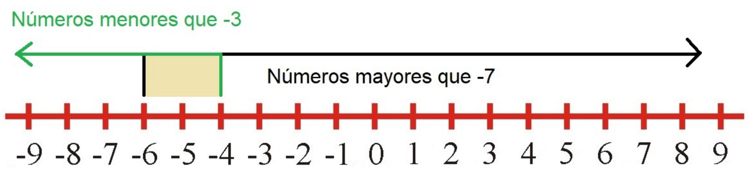

Figura 12: Pregunta 27

27 Los números enteros mayores que -7 van de -6 a -1, además del 0 y de los números positivos. Siguen la flecha negra de la figura 12. Se descartan las opciones C (-8) y D (-10). Los números enteros menores que -3 son $-4, -5, -6, \ldots$ hasta $-\infty$, siguiendo la línea verde. Uniendo ambas condiciones, los números que lo cumplen son $-6, -5$ y -4, que se encuentran en el recuadro amarillo. *Opción correcta*: B.

28 La suma de dos números negativos devuelve un número negativo. Se pueden sumar los términos positivos y luego colocar el signo de menos, de la siguiente manera:

$$-25 + -6 = -(25 + 6) = -31$$

Opción correcta: D.

29 La primera multiplicación corresponde a $4 \cdot -2$. Por ley de signos, al solo aparecer un signo menos $-$ en la multiplicación, el número es negativo. Entonces $4 \cdot -2 = -4 \cdot 2 = -8$. La segunda multiplicación es este resultado por -5, es decir,

$$4 \cdot -2 \cdot -5 = -8 \cdot -5.$$

Al aparecer dos signos menos $(-)$, el producto es positivo, entonces

$$-8 \cdot -5 = 8 \cdot 5 = 40.$$

Opción correcta: A.

30 Por ley de signos, como el dividendo (-115) como el divisor (-5) son negativos, el cociente es positivo. Se efectúa la división con los signos positivos: $-115 \div -5 = 115 \div 5 = 23$. *Opción correcta*: A.

31 A las 3 a.m. la temperatura era de $-10\ °C$, de las 3 a.m. a las 2 p.m. la temperatura subió $15\ °C$, por lo que la temperatura en ese intervalo corresponde a $-10\ °C + 15\ °C = 5\ °C$.

De las 2 p.m.a las 7 p.m. bajó $6\ °C$. Dado que la temperatura a las 2 p.m. era de $5\ °C$, a las 7 p.m. corresponde a $5\ °C - 6\ °C = -1\ °C$. *Opción correcta*: D.

32 Primero se realizan las multiplicaciones y divisiones. La primera multiplicación es $-16 \cdot -3$. Por la ley de signos, al ser ambos negativos el resultado es positivo. Luego, $-16 \cdot -3 = - - 16 \cdot 3 = 16 \cdot 3 = 48$. La división es $9 \div 3 = 3$. Entonces $-16 \cdot -3 + 9 \div 3 = 48 + 3 = 51$. *Opción correcta:* B.

33 La primera operación que se realiza es la que se encuentra dentro de los paréntesis ( ). En este caso, corresponde a

$$(-13 + -5) = -13 - 5 = -18$$

Con este valor, se procede a realizar la operación en los corchetes [ ]. Entonces,

$$[(-13 + -5) \div -2] = -18 \div -2 = 18 \div 2 = 9.$$

Por último, se efectúa la operación fuera de los corchetes. De esta forma,

$$4 - [(-13 + -5) \div -2] = 4 - 9 = -5.$$

Opción correcta: C.

34 Primeramente se calcula lo que se encuentra entre paréntesis ( ) que corresponde a $(5 - 4 \cdot 9)$. De lo anterior, primero se realiza la multiplicación $4 \cdot 9 = 36$ y luego la resta

$$(5 - 4 \cdot 9) = 5 - 4 \cdot 9 = 5 - 36 = -31.$$

Seguidamente, se multiplica lo calculado entre paréntesis por el número fuera de este, entonces,

$$6(5 - 4 \cdot 9) = 6 \cdot -31 = -186.$$

Por último, se efectúa la resta,

$$7 - 6(5 - 4 \cdot 9) = 7 - -186 = 7 + 186 = 193.$$

Opción correcta: B.

35 Como la base es negativa (-4) y la potencia es par, se utiliza el opuesto de la base (4) para efectuar el cálculo. Por lo tanto,

$$(-4)^2 = 4^2 = 4 \cdot 4 = 16.$$

Opción correcta: B.

36 La proposición I es verdadera. Cuando se eleva un número que ya tiene un exponente, ambos exponentes se multiplican. En este caso, la base corresponde a 4^3, que ya contiene el 3 como exponente. Entonces

$$(4^3)^5 = 4^{3 \cdot 5} = 4^{15}.$$

La proposición II también es correcta. Note que en la división se tiene la misma base (-3). Cuando se dividen dos números con la misma base pero con diferentes exponentes, estos exponentes se restan y la base se mantiene constante. En nuestro caso,

$$(-3)^5 \div (-3)^3 = (-3)^{5-3} = (-3)^2.$$

Opción correcta: A.

37 En el orden de las operaciones por efectuar, primero se realizan las potencias. En este caso corresponde a -3^2. Vea que el exponente solo aplica para la base 3, por lo que $-3^2 = -9$. En segundo lugar, se calcula la multiplicación,

$$2 \cdot -5 = -(2 \cdot 5) = -10.$$

Queda el último puesto la suma, entonces

$$-3^2 + 2 \cdot -5 = -9 + -10 = -19.$$

Opción correcta: D.

38 Primero se realizan las operaciones entre paréntesis ( ). En este ejercicio sería

$$(-5+3) = (-2).$$

Seguidamente, van las potencias. Hay dos en este caso:

- $-3^0 = -1$. La base es 3 y el exponente es 0. Es conocido que $3^0 = 1$. Como este número es antecedido por un menos $(-)$, el resultado es negativo.
- $(-5+3)^2 = (-2)^2 = 4$. Vea que al ser un número negativo elevado a una potencia par, el resultado es positivo.

Quedan por último las sumas y restas. Entonces,

$$-3^0 - (-5+3)^2 + 4 = -1 - 4 + 4 = -5 + 4 = -1.$$

Opción correcta: D.

39 El número que multiplica la variable x, pasa al otro lado de la ecuación a dividir la expresión. En la ecuación dada se tiene que $-5 \cdot x = -20$ entonces $x = -20 \div -5$. Se aplica la ley de signos en la división. De esta manera, $x = - - 20 \div 5 = 20 \div 5 = 4$. *Opción correcta*: A.

40 El valor que suma del lado de la variable x en la ecuación, pasa a restar al lado opuesto. Entonces $x + 3 = -11$ implica que $x = -11 - 3 = -14$. *Opción correcta*: D.

41

Observación 1. Sean a, b, c tres números enteros. Entonces $\mathrm{a}\frac{b}{c} = \dfrac{a \cdot c + b}{c}$.

En este ejercicio, $a = -10$, $b = 2$ y $c = 5$, entonces

$$\text{-10}\frac{2}{5} = \frac{-10 \cdot 5 + 2}{5} = \frac{-50 + 2}{5} = \frac{-48}{5}.$$

Opción correcta: C.

42 Al dividir 5 entre 3, da como resultado $1,6666\ldots$. Esta fracción corresponde a un racional periódico puro, es decir, el decimal (6) se repite infinitamente. Por lo tanto, $\frac{5}{3} = 1,\bar{6}$. Este número se puede redondear a $1,67$, pero no es el valor exacto, sino una aproximación. *Opción correcta:* C.

43 La primera proposición es cierta. Los números racionales $\mathbb{Q}$ incluyen todos los números enteros $\mathbb{Z}$. En particular, incluyen a los enteros positivos $\mathbb{Z}^+$ al estos pertenecer a $\mathbb{Z}$. La segunda es falsa, ya que $\mathbb{Q}^-$ solo incluye los racionales negativos y 0 no se considera ni positivo ni negativo. *Opción correcta*: C

44 Para la proposición I, note que de lado izquierdo de la igualdad se encuentra un número negativo en valor absoluto. Este pasa a ser positivo, es decir,

$$\left|\frac{-11}{7}\right| = \frac{11}{7}.$$

De lado derecho se encuentra un número mixto. Aplicando la igualdad del ejercicio 41, con $a = 1$,$b = 4$ y $c = 7$, se tiene que

$$1\frac{4}{7} = \frac{1 \cdot 7 + 4}{7} = \frac{7+4}{7} = \frac{11}{7}.$$

Como ambas expresiones son idénticas, se cumple la igualdad y la proposición es correcta.

En relación con la proposición II, de lado derecho se encuentra un número negativo en valor absoluto, por lo que pasa a ser positivo, pero, además, hay un signo de menos $(-)$ que acompaña este valor absoluto, por lo que el número pasa a ser negativo. Algebraicamente,

$$-\left|\frac{-3}{4}\right| = -\frac{3}{4} = \frac{-3}{4}.$$

De lado derecho se ubica un número positivo, $\dfrac{3}{4}$, por lo que no se da la igualdad y la proposición es incorrecta. *Opción correcta*: C.

45 Para comparar los números, se pasan todos a expresiones decimales. Para tal fin, se convierte el número mixto. Usando la fórmula dada en el ejercicio 41,

$$2\frac{1}{5} = \frac{2 \cdot 5 + 1}{5} = \frac{11}{5} = 2,2.$$

Seguidamente, comparemos término por término, de izquierda a derecha, cada número. Todos tienen 2 como unidad. Entonces se sigue con el primer decimal. El decimal de $2,\overline{051}$ es 0. Para $2,51$ y $2,\overline{51}$ es 5 y para $2\frac{1}{5}$ es 2. Por lo tanto, el menor número es $2,\overline{051}$, que tiene el menor decimal de todos. *Opción correcta*: C.

46

Observación 2. Sean a, b, c, d números reales. Entonces, $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{a \cdot d + b \cdot c}{c \cdot d}$ y $\dfrac{a}{b} - \dfrac{c}{d} = \dfrac{a \cdot d - b \cdot c}{c \cdot d}$.

En este ejercicio, $a = -3, b = 4, c = 5$ y $d = 6$. Usando la segunda igualdad,

$$\frac{-3}{4} - \frac{5}{6} = \frac{-3 \cdot 6 - 4 \cdot 5}{4 \cdot 6} = \frac{-18 - 20}{24} = \frac{-38}{24}.$$

Note que, tanto el denominador como el numerador son pares, por lo que se pueden dividir ambos números entre 2 sin afectar el resultado. De esta manera,

$$\frac{-38}{24} = \frac{-38 \div 2}{24 \div 2} = \frac{-19}{12}.$$

Opción correcta: D.

47 Primero se pasa el número mixto a fracción, utilizando la fórmula de la Observación 1 (pregunta 41), de modo que

$$-3\frac{1}{5} = \frac{-3 \cdot 5 + 1}{5} = \frac{-15 + 1}{5} = \frac{-14}{5}.$$

Con este resultado, se aplica la primera igualdad de la pregunta 46, por lo que

$$-3\frac{1}{5} + \frac{2}{3} = \frac{-14}{5} + \frac{2}{3} = \frac{-14 \cdot 3 + 2 \cdot 5}{5 \cdot 3} = \frac{-42 + 10}{15} = \frac{-32}{15},$$

lo cual no se puede simplificar más. *Opción correcta*: C.

48 Pasamos el número mixto a fracción, con la Observación 1 (pregunta 41). Entonces,

$$-2\frac{1}{7} = \frac{-2 \cdot 7 + 1}{7} = \frac{-14 + 1}{7} = \frac{-13}{7}.$$

Se utiliza el resultado para efectuar la multiplicación. Se multiplican los numeradores y los denominadores de cada fracción. De esta manera,

$$-2\frac{1}{7} \cdot \frac{3}{5} = \frac{-13}{7} \cdot \frac{3}{5} = \frac{-13 \cdot 3}{7 \cdot 5} = \frac{-39}{35},$$

que es irreducible. *Opción correcta*: C.

49 Se debe dividir la cantidad total de jugo disponible entre la capacidad de cada vaso. El pichel contiene 5,2 L, que es igual a $\frac{52}{10} = \frac{26}{5}$ L. El vaso tiene $\frac{1}{5}$ L de capacidad, que es lo mismo que 0,2 L. Dividiendo,

$$\frac{\frac{52}{10}}{\frac{1}{5}} = \frac{5,2}{0,2} = 26.$$

Opción correcta: D.

50 En primera instancia, se pasa el número mixto a fracción con la igualdad de la Observación 1 (pregunta 41). Así,

$$2\frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 5 + 2}{5} = \frac{10 + 2}{5} = \frac{12}{5}.$$

Entonces,

$$\left(2\frac{2}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{12}{5}\right)^{-2}.$$

Seguidamente, se sustituye el exponente negativo (-2) por su opuesto positivo (2) invirtiendo la fracción. Entonces,

$$\left(2\frac{2}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{12}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{12}\right)^{2}.$$

Luego, se eleva tanto el numerador como el denominador por el exponente, entonces

$$\left(2\frac{2}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{12}\right)^{2} = \frac{5^2}{12^2} = \frac{144}{25}.$$

Opción correcta: D.

51 Hay dos formas de ver este ejercicio.

1. Se simplifican primero ambas fracciones, al efectuar las potencias. Los exponentes negativos pasan a ser positivos al invertir la fracción. De esta manera,

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{-3} = \left(\frac{5}{2}\right)^{3} \quad \text{y} \quad \left(\frac{2}{5}\right)^{-1} = \left(\frac{5}{2}\right)^{1},$$

y se aplica el exponente tanto al numerador como al denominador.

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{-3} = \left(\frac{5}{2}\right)^{3} = \frac{5^3}{2^3} = \frac{125}{8} \quad \text{y} \quad \left(\frac{2}{5}\right)^{-1} = \left(\frac{5}{2}\right)^{1} = \frac{5^1}{2^1} = \frac{5}{2}.$$

Entonces se cumple que

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{-3} \div \left(\frac{2}{5}\right)^{-1} = \frac{125}{8} \div \frac{5}{2}.$$

Al dividir por una fracción, se puede invertir la fracción de la derecha y se cambia la división por una multiplicación, de modo que

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{-3} \div \left(\frac{2}{5}\right)^{-1} = \frac{125}{8} \div \frac{5}{2} = \frac{125}{8} \cdot \frac{2}{5},$$

y se multiplican los numeradores y los denominadores.

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{-3} \div \left(\frac{2}{5}\right)^{-1} = \frac{125}{8} \cdot \frac{2}{5} = \frac{125 \cdot 2}{8 \cdot 5} = \frac{250}{40}.$$

Tanto el denominador como el numerador son números divisibles por 10, al terminar ambos en 0. Así, se puede simplificar la expresión.

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{-3} \div \left(\frac{2}{5}\right)^{-1} = \frac{250}{40} = \frac{250 \div 10}{40 \div 10} = \frac{25}{4}$$

2. Vea que ambos números tienen la misma base $\left(\frac{2}{5}\right)$ pero diferente exponente. Al estar dividiéndose, los exponentes se restan. De esta forma,

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{-3} \div \left(\frac{2}{5}\right)^{-1} = \left(\frac{2}{5}\right)^{-3-(-1)} = \left(\frac{2}{5}\right)^{-3+1} = \left(\frac{2}{5}\right)^{-2}.$$

Posteriormente, se invierte la fracción para que el exponente sea positivo y se aplica la potencia en el numerador y el denominador. Por lo tanto,

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{-3} \div \left(\frac{2}{5}\right)^{-1} = \left(\frac{2}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{2}\right)^{2} = \frac{5^2}{2^2} = \frac{25}{4}.$$

Opción correcta: A.

52 La primera proposición es correcta. Primero se efectúan las potencias de adentro hacia afuera. La primera potencia corresponde a $\left(\frac{-1}{2}\right)^{-1}$. Cuando se eleva a la -1 solo se invierte la fracción, entonces

$$\left(\frac{-1}{2}\right)^{-1} = -\frac{2}{1} = -2.$$

Luego, se aplica la segunda potencia al resultado obtenido. Entonces,

$$\left[\left(\frac{-1}{2}\right)^{-1}\right]^2 = [-2]^2 = 4$$

al ser un número negativo (-2) elevado a un exponente par (2).

La segunda proposición es incorrecta. Recuerde que cualquier base a elevado a 0 es 1, es decir, $a^0 = 1$. De lado izquierdo de la igualdad, note que la base del exponente 0 es 1. Como $1^0 = 1$, entonces

$$\frac{-1^0}{5} = \frac{-1}{5}.$$

De lado derecho, vea que la base es toda la fracción $\left(\frac{-1}{5}\right)$, entonces, por lo dicho anteriormente,

$$\left(\frac{-1}{5}\right)^0 = 1.$$

Opción correcta: C.

53 Primero se efectúa la operación entre paréntesis ( ). Utilizando la primera igualdad de la Observación 2 (pregunta 46), se tiene que

$$\frac{2}{5} - \frac{-3}{2} = \frac{2 \cdot 2 - -3 \cdot 5}{5 \cdot 2} = \frac{4 + 15}{10} = \frac{19}{10}.$$

Una vez obtenido este resultado, se procede a resolver la división. La fracción de la derecha se invierte y se cambia el signo de división por una multiplicación. Así,

$$-4 \div \left(\frac{2}{5} - \frac{-3}{2}\right) = -4 \div \frac{19}{10} = -4 \cdot \frac{10}{19}.$$

Luego, se multiplican los denominadores y los numeradores de ambas fracciones. Se entiende que $-4 = \frac{-4}{1}$. Por lo tanto,

$$-4 \div \left(\frac{2}{5} - \frac{-3}{2}\right) = -4 \cdot \frac{10}{19} = \frac{-4 \cdot 10}{1 \cdot 19} = \frac{-40}{19}.$$

Opción correcta: D.

54 En primer lugar se efectúa la potencia de la fracción dentro de los corchetes. La base corresponde a $\frac{1}{2}$ y el exponente es 2, entonces

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1^2}{2^2} = \frac{1}{4}.$$

Seguidamente, se simplifica la resta. De esta manera,

$$-\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{-2}{4} = -\frac{-2 \div 2}{4 \div 2} = \frac{-1}{2}.$$

Como ambos números son pares, se simplifican dividiéndolos entre 2. Obtenida esta fracción, por último se calcula la potencia fuera de los corchetes [ ]. Al ser negativa (-2), se invierte la fracción y se potencia tanto el denominador como el numerador por el opuesto del exponente (2). Entonces,

$$\left[-\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right]^{-2} = \left[\frac{-1}{2}\right]^{-2} = \left[\frac{2}{-1}\right]^2 = \frac{2^2}{(-1)^2} = \frac{4}{1} = 4.$$

Opción correcta: B.

55 Se simplifican al máximo el numerador y el denominador de la fracción mayor. El denominador corresponde a $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$. Se invierte la fracción interna y se elevan los números por la potencia positiva, es decir,

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^{2} = \frac{3^2}{2^2} = \frac{9}{4}.$$

En el denominador, se resuelven ambas potencias.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{2} = \frac{1^2}{2^2} = \frac{1}{4} \quad \text{y} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = \frac{2^1}{1^1} = 2.$$

Luego, se efectúa la suma,

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = \frac{1}{4} + 2 = \frac{1 + 4 \cdot 2}{4} = \frac{9}{4}.$$

Reemplazando con los valores obtenidos, se cumple que

$$\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}} = \frac{\frac{9}{4}}{\frac{9}{4}}$$

Tanto el numerador como el denominador son iguales, por lo que el resultado de dividir ambos números es 1. *Opción correcta*: B.

Solucionario

Matemática I Térraba 2011

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D	D	D	C	C	D	B	C	B	D

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
B	B	D	A	A	B	D	A	B	C

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
C	A	A	C	D	D	B	D	A	A

31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
D	B	C	B	B	A	D	D	A	D

41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
C	C	C	C	C	D	C	C	D	D

51	52	53	54	55					
A	C	D	B	B					