

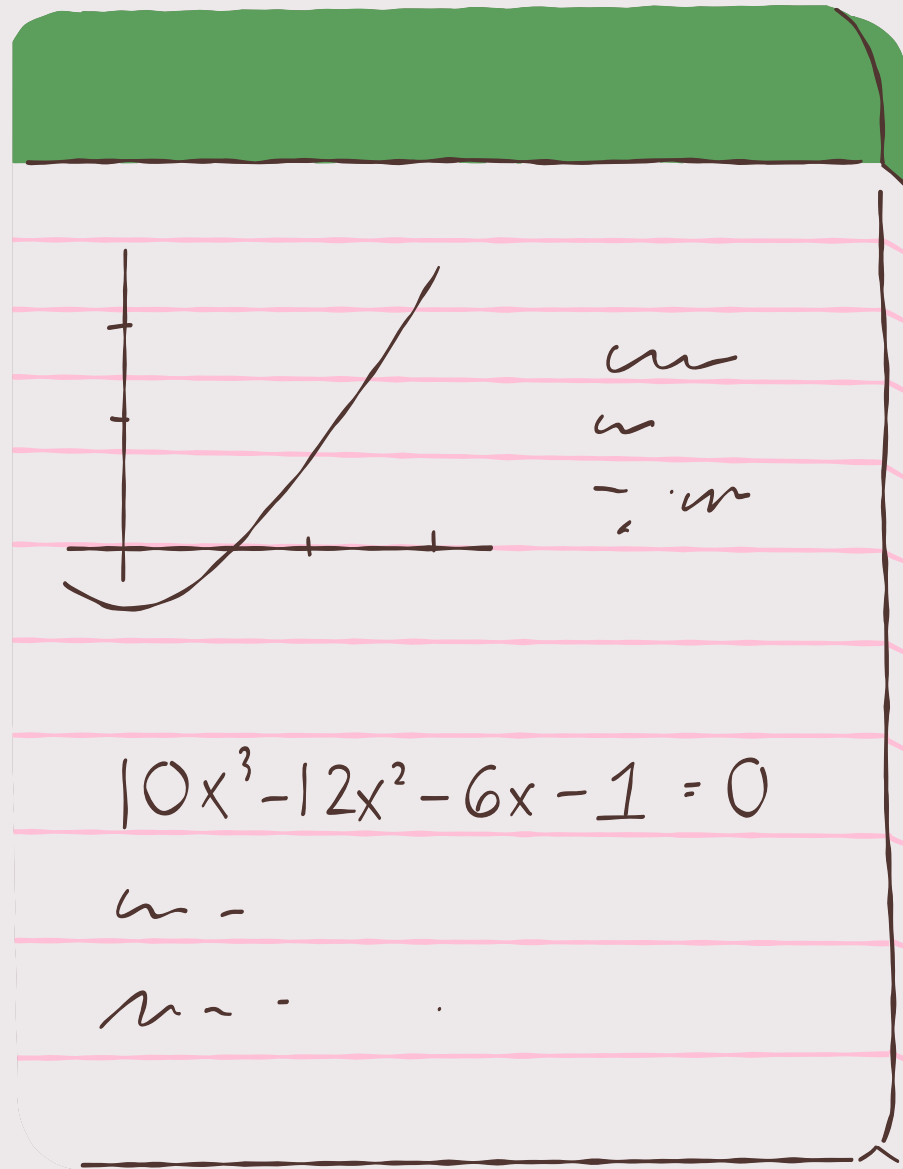
5

Bachillerato

POLÍGONOS

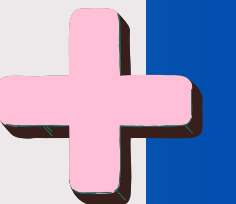
Elaborado por Erick Sancho
TC-89 Servicios Educativos





INTRODUCCIÓN

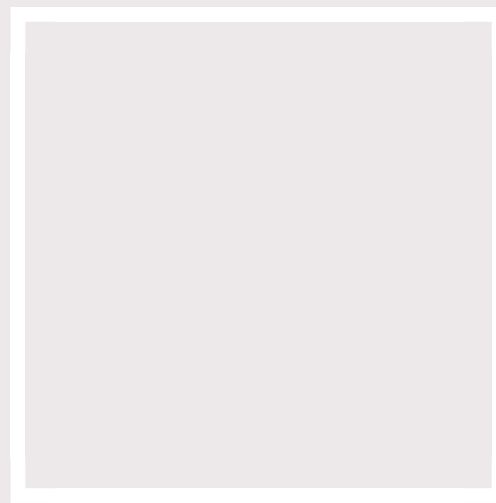
Los polígonos son figuras geométricas planas que tienen tres o más lados rectos y ángulos interiores. Cada uno de los lados de un polígono está unido a otros dos lados en sus extremos, formando un conjunto cerrado de segmentos que delimitan un área, estos pueden ser regulares o irregulares, dependiendo de si tienen lados y ángulos de igual longitud y medida respectivamente.



TIPOS DE POLÍGONOS

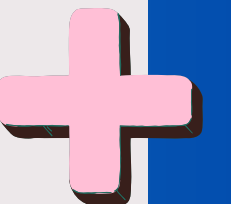
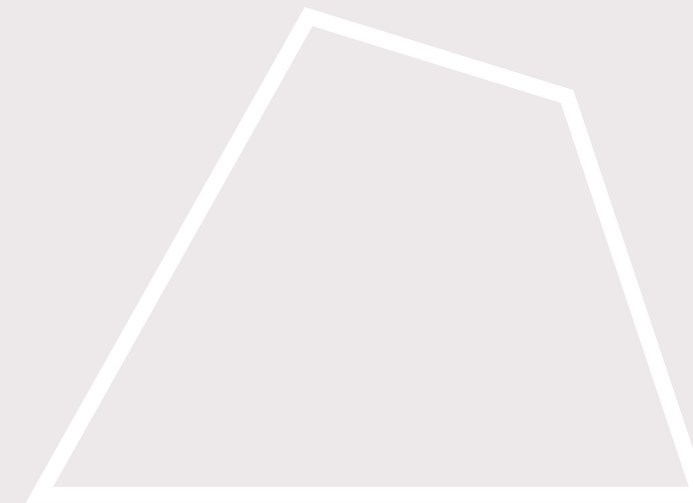
REGULARES

Son aquellos polígonos que tienen todos sus ángulos interiores y lados de la misma medida.



IRREGULARES

Son aquellos polígonos que no tienen todos sus lados de la misma longitud ni todos sus ángulos iguales. En otras palabras, los lados y los ángulos interiores de un polígono irregular varían en tamaño y medida.



ALGUNOS EJEMPLOS DE POLÍGONOS REGULARES



TRIÁNGULO



CUADRADO



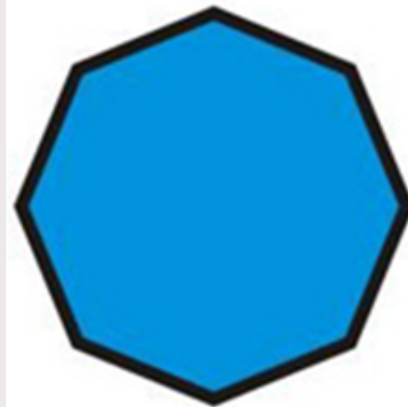
PENTÁGONO



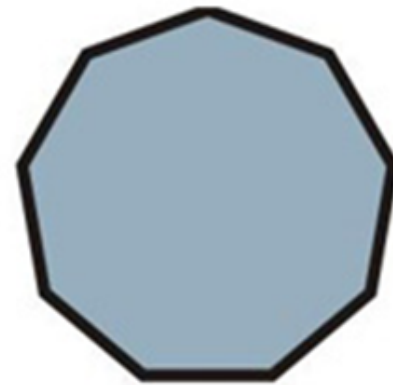
HEXÁGONO



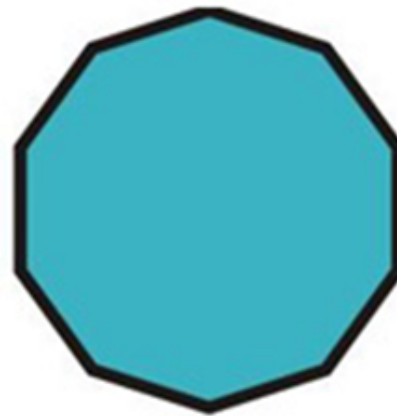
HEPTÁGONO



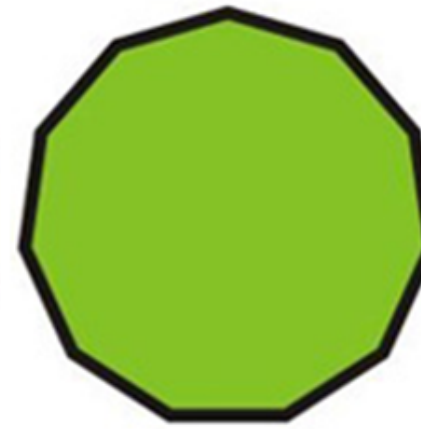
OCTÓGONO



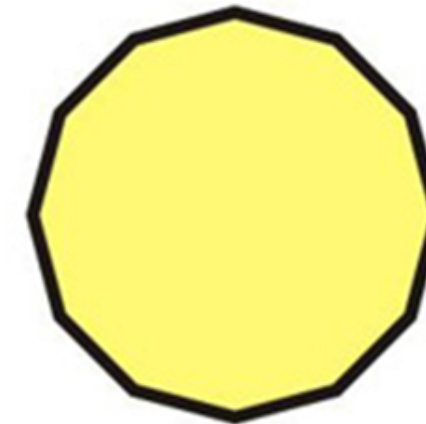
ENEÁGONO



DECÁGONO

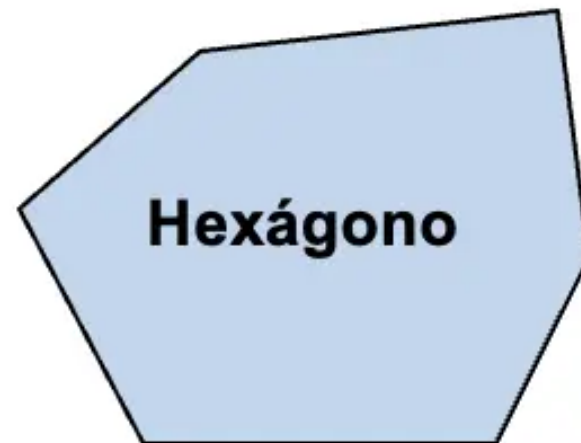
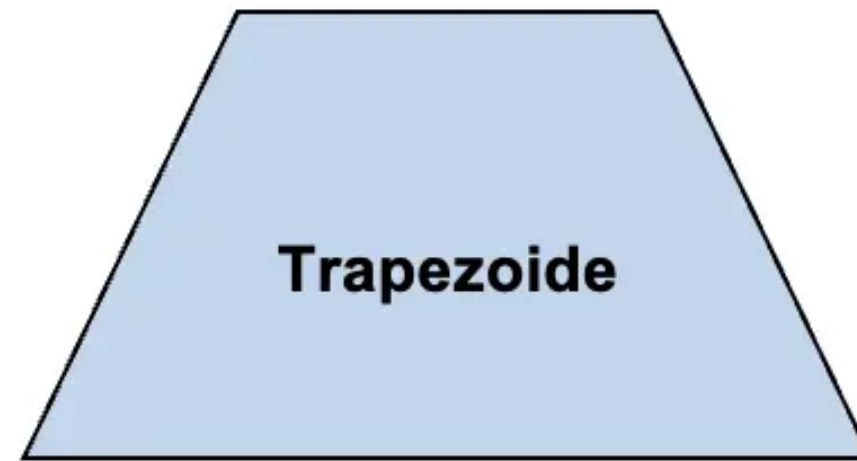
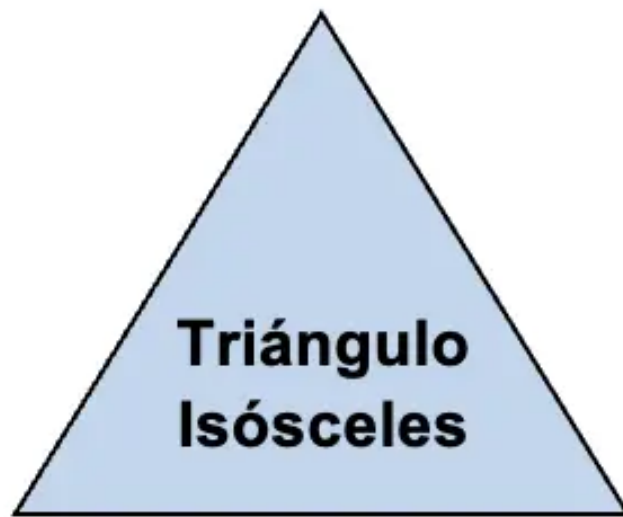


UNDECÁGONO





DODECAGÓGONO

ALGUNOS EJEMPLOS DE POLÍGONOS IRREGULARES



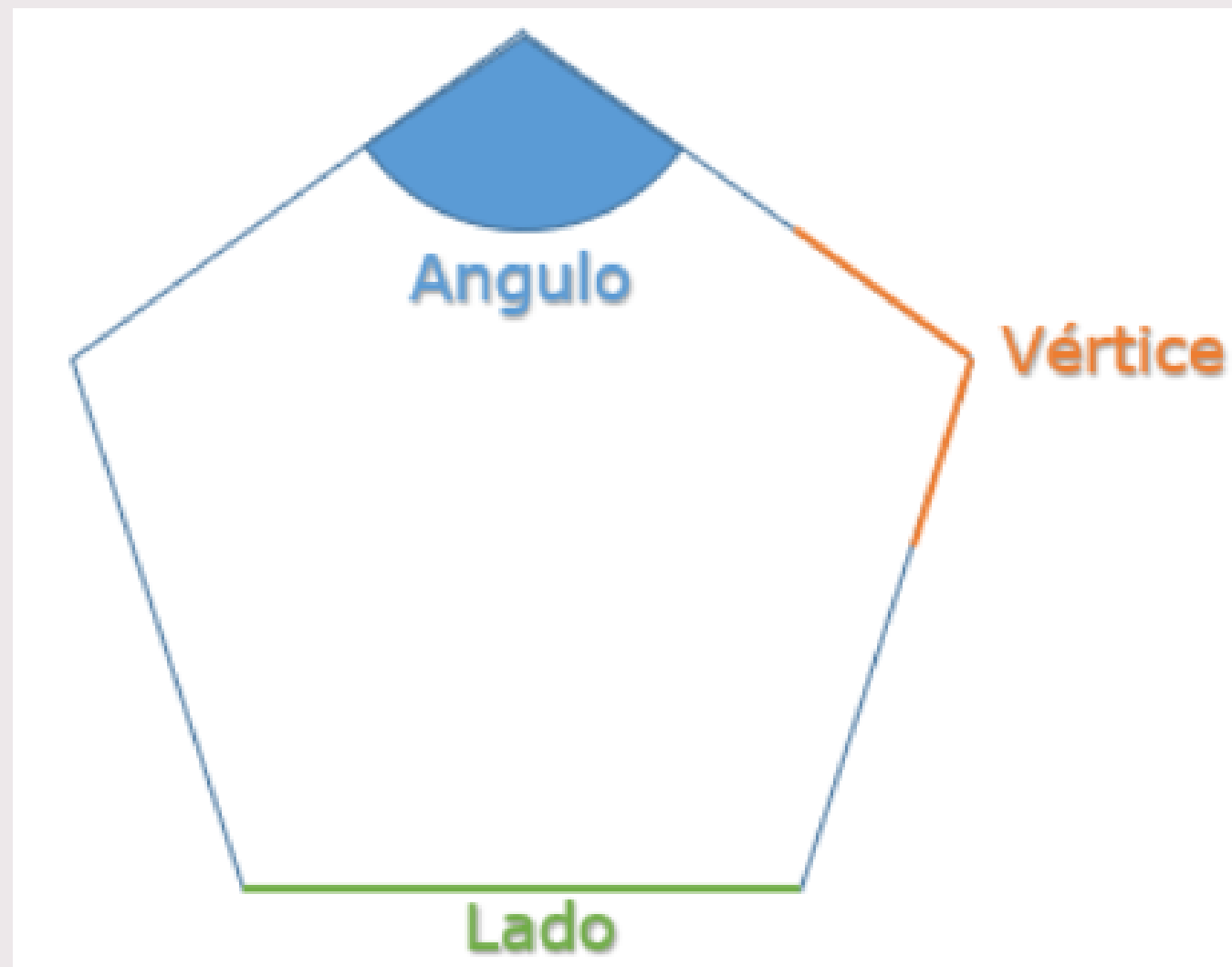
SE CLASIFICAN POR EL NÚMERO DE LADOS

Número de lados	Nombre	
3	Triángulo	
4	Cuadrilátero	
5	Pentágono	
6	Hexágono	
7	Heptágono	
8	Octágono	

Generalmente se suele utilizar la letra "n" para referirse al número de lados de un polígono entonces por ejemplo






- Para un triángulo n es igual a 3
- Para un cuadrado $n = 4$

ELEMENTOS DE UN POLÍGONO



- **Ángulo:** el ángulo de un polígono es la medida de la apertura formada por dos lados adyacentes de la figura geométrica, se denotan en grados y además se clasifican con base en su medida. Además, en los polígonos regulares, los ángulos interiores tienen la misma medida, mientras que en los polígonos irregulares, los ángulos interiores pueden variar en tamaño.
- **Vértice:** cada vértice de un polígono es el punto donde dos o más lados se encuentran y forman un ángulo.
- **Lado:** el lado de un polígono se conoce como cada uno de los segmentos de línea recta que conectan dos vértices consecutivos de la figura geométrica.

TIPOS DE ÁNGULOS

Tipo	Descripción
Ángulo agudo 	Es decir, mayor de 0° y menor de 90°
Ángulo recto 	Es equivalente a 90°
Ángulo obtuso 	Mayor a 90° y menor a 180°
Ángulo llano, extendido. 	Equivalente a 180°
Ángulo completo 	Equivalente a 360°

ÁREA, PERÍMETRO Y
ÁNGULOS DE
POLÍGONOS
REGULARES

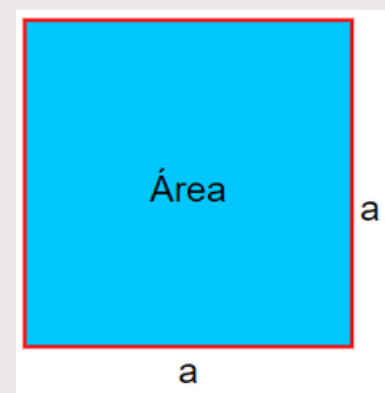
Una vez que se estudiaron los tipos de polígonos y figuras geométricas, a nivel de bachillerato es importante realizar cálculos de áreas, perímetros, ángulos, diagonales y radios de las diferentes figuras geométricas, además de familiarizarse con las respectivas fórmulas y saber aplicarlas según los ejercicios que se deban resolver. Además se analizarán a detalle cada una de las fórmulas que se brindan en el formulario de examen de bachillerato de matemática.

ÁREA Y PERÍMETRO DE UN POLÍGONO REGULAR

Las áreas y perímetros se pueden calcular de diferentes maneras, dependiendo del tipo de polígono con el cual estemos tratando de modo que cada polígono tiene su fórmula distintiva pero primero:

- ¿Qué es el área de un polígono?

El área de un polígono es la medida de la superficie encerrada dentro de los límites del polígono y se representa en cm^2 . Es decir, corresponde a la cantidad de espacio bidimensional que ocupa un polígono en un plano. Para el cuadrado de la siguiente figura, toda la zona en azul corresponde al área, o sea, que todo ese espacio es ocupado en un plano y depende de la medida de sus lados. Por ejemplo el área de un cuadrado se puede calcular multiplicando el dos veces el valor de sus lados o bien elevarlos al cuadrado.



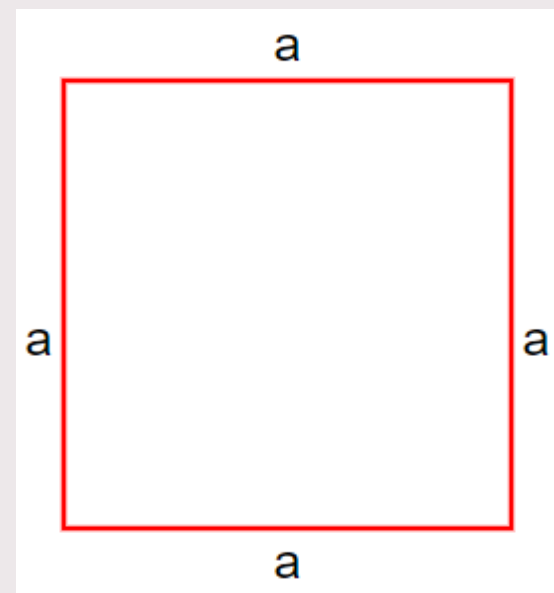
$$\text{Área} = a * a = a^2$$

nota: el área se representa con la letra A mayúscula

ÁREA Y PERÍMETRO DE UN POLÍGONO REGULAR

- ¿Qué es el perímetro de un polígono?

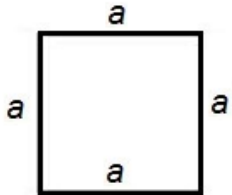
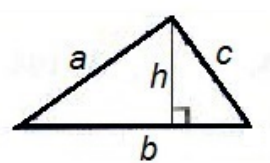
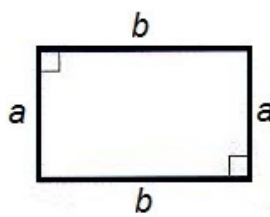
El perímetro de un polígono es la medida de la longitud total de su borde, es decir, la suma de las longitudes de todos sus lados. En otras palabras, el perímetro de un polígono es la distancia alrededor de su exterior. Por ejemplo, el perímetro de un cuadrado se puede calcular sumando las cuatro longitudes de sus lados o multiplicando la longitud de un lado por 4. Dicho esto el perímetro corresponde únicamente a la longitud del borde marcado en rojo del cuadrado de la siguiente figura.

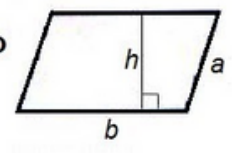
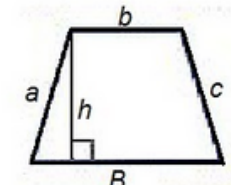
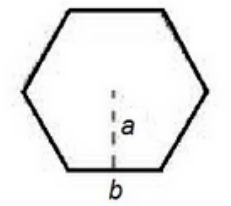


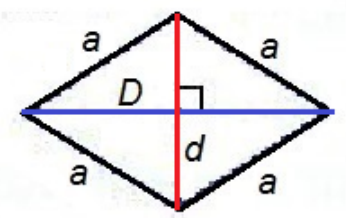
$$P = 4 \cdot a = a + a + a + a$$

nota: el perímetro se representa con la letra P mayúscula

FÓRMULAS PARA CÁLCULO DE ÁREA Y PERÍMETRO DE POLÍGONOS REGULARES MÁS COMUNES

<p>Cuadrado</p> 	$A = a^2$ $P = 4 \cdot a$
<p>Triángulo</p> 	$A = \frac{b \cdot h}{2}$ $P = a + b + c$
<p>Rectángulo</p> 	$A = b \cdot a$ $P = 2 \cdot (b + a)$

<p>Paralelogramo</p> 	$A = b \cdot h$ $P = 2 \cdot (b + a)$
<p>Trapezio</p> 	$A = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$ $P = B + b + a + c$
<p>Polígono Regular</p> 	$A = \frac{P \cdot a}{2}$ $P = n \cdot b$ <p><i>n</i>, es el número de lados <i>a</i>, es la apotema</p>

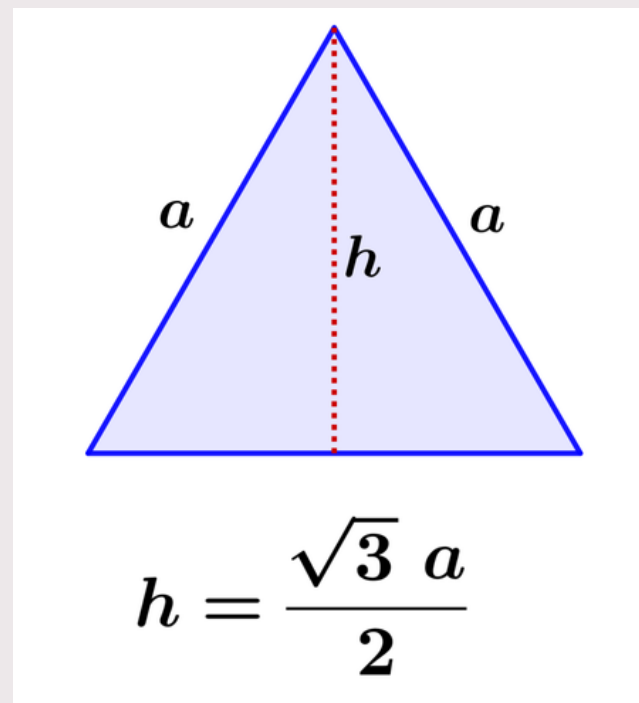
<p>Rombo</p> 	$A = \frac{D \cdot d}{2}$ $P = 4 \cdot a$
---	---

APOTEMAS, ALTURAS, RADIOS Y DIAGONALES

En las fórmulas anteriores aparecieron nuevas simbologías como "h" y "a" minúscula. Donde

- h: es la altura de un polígono y corresponde a la distancia perpendicular entre dos lados paralelos del polígono. En otras palabras, la altura es la distancia vertical desde un lado del polígono hasta el lado paralelo más cercano.

Entonces para un triángulo la altura h se representa de la siguiente manera junto a su fórmula, la apotema se explica en la siguiente diapositiva



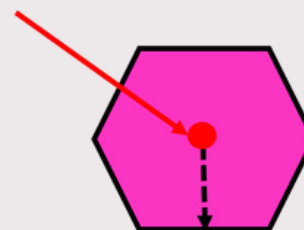
Simbología	Triángulo equilátero
r radio	$h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$
d diagonal	
a apotema	$a = \frac{h}{3}$
ℓ lado	
h altura	

APOTEMAS, ALTURAS, RADIOS Y DIAGONALES

- a: es la apotema de un polígono regular corresponde a la distancia desde el centro del polígono hasta el centro de uno de sus lados. En otras palabras, es la altura de un triángulo isósceles que tiene como base un lado del polígono y cuyos otros dos lados son radios del polígono que se extienden desde su centro al punto medio de dicho lado.
- Para trabajar con cualquier polígono sin la necesidad de buscar cada una de sus fórmulas para calcular áreas, **la apotema es importante en el cálculo del área de un polígono regular, ya que se puede utilizar junto con la longitud del lado para calcular el área.**
- De modo que para calcular el área de cualquier polígono regular lo podemos hacer con la siguiente fórmula:

Área P : perímetro, a : apotema	$A = \frac{P \cdot a}{2}$
------------------------------------	---------------------------

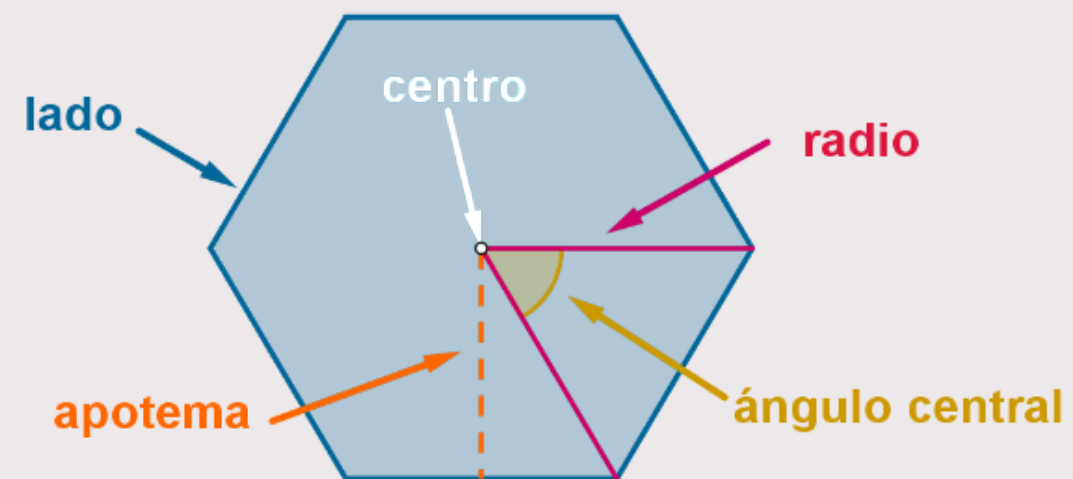
apotema



Del centro al punto medio de cada lado

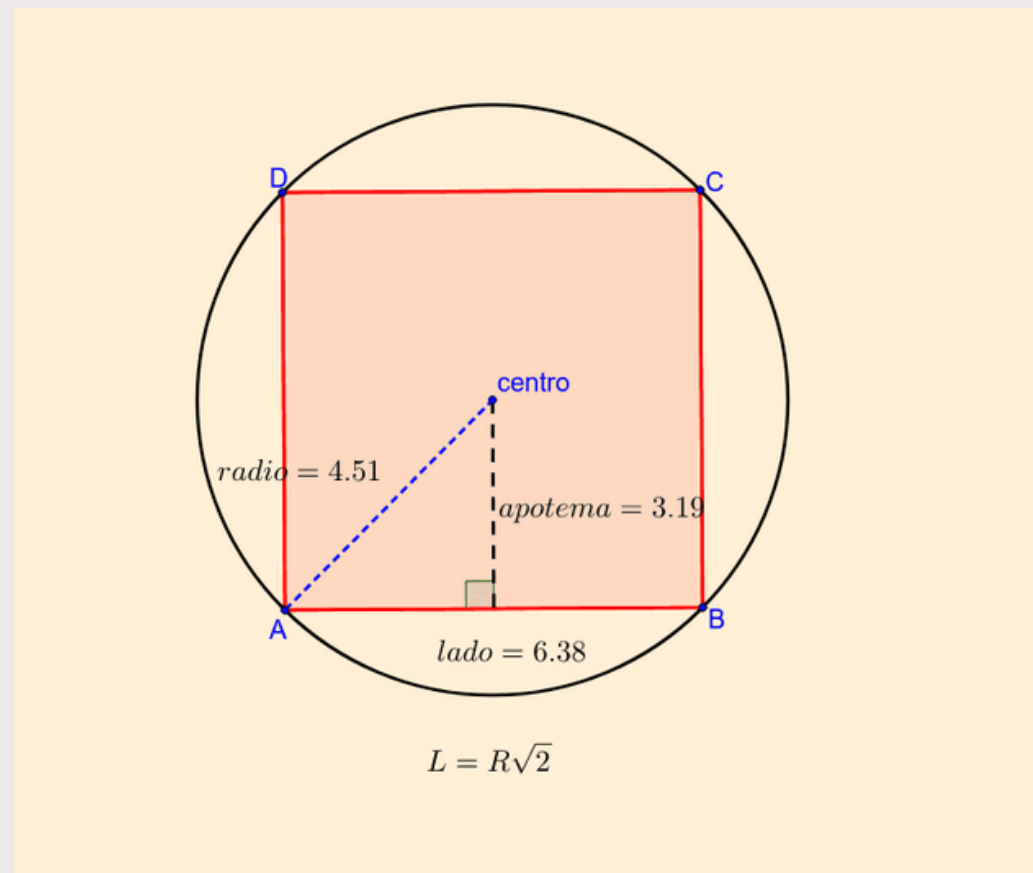
DIFERENCIA ENTRE RADIO Y APOTEMA

- r : corresponde al radio de un polígono regular que se mide desde el centro de un polígono hasta cualquiera de sus vértices.
- En un polígono regular, el radio " r " se refiere a la distancia desde el centro del polígono hasta cualquier vértice. La apotema, por otro lado, se refiere a la distancia desde el centro del polígono hasta el centro de uno de sus lados. En la siguiente figura observamos sus diferencias.



EJ: CÁLCULOS DE UN CUADRADO

- En la siguiente figura tenemos un ejemplo claro para calcular un radio y una apotema a partir de un lado, además de otras propiedades, entonces:



fórmula de radio del cuadrado $\Rightarrow r = l / \sqrt{2} = d / 2$
donde l = lado, d = diagonal

- Con un lado $L = 6.38$
- $a = L / 2 = 6.38 / 2 = 3.19$
- $r = L / \sqrt{2} = 6.38 / \sqrt{2} = 4.51$
- $h = L$
- $P = 4 * L = 4 * 6.38 = 25.52$
- Área = $(P * a) / 2$
- $A = (25.52 * 3.19) / 2 = 40.70$

FÓRMULAS DEL MEP

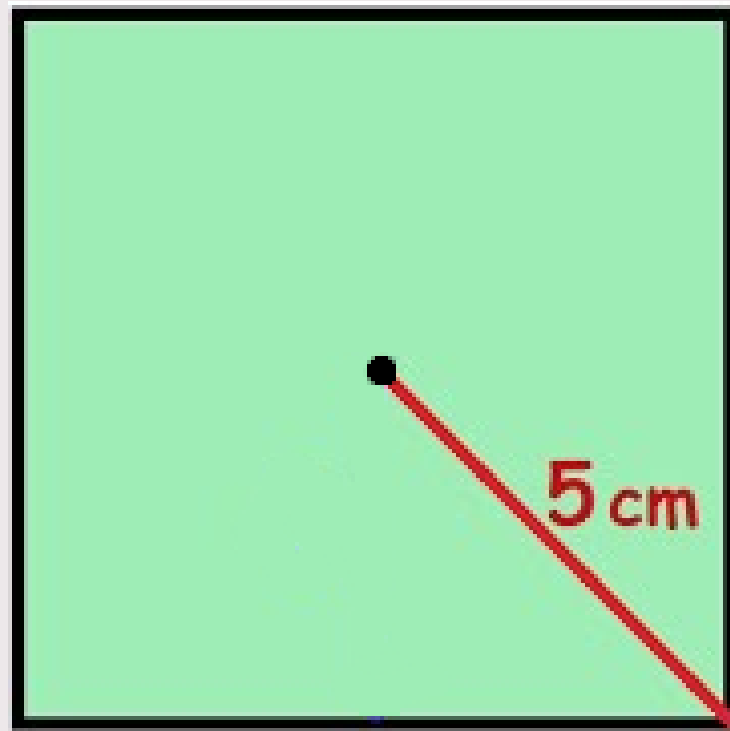
- En la siguiente figura tenemos unas fórmulas para 3 distintos polígonos regulares de sus diferentes propiedades:

Simbología	Triángulo equilátero	Cuadrado	Hexágono regular
r radio	$h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$	$\ell = \frac{d\sqrt{2}}{2}$	$a = \frac{r\sqrt{3}}{2}$
d diagonal			
a apotema	$a = \frac{h}{3}$		
ℓ lado			
h altura			

Cuando haya que resolver ejercicios se deben atender a la información brindada, y trabajar con ello para calcular lo que nos piden por ejemplo con conocer el radio de un cuadrado podemos hacer mucho por como despejar la longitud de un lado, eso nos lleva a calcular el área y perímetro y básicamente de eso se trata la solución de ejercicios de polígonos.

EJ:

- Calcular el radio, diagonal, lado, perímetro, apotema y área del siguiente cuadrado:



Identificando esa longitud de 5cm podemos decir que corresponde al radio. Entonces:

$$r = 5 \text{ cm}$$

podemos decir que el radio es la mitad de la **diagonal** o que la diagonal es el doble del radio (se explica en la dispositiva 26) entonces

$$d = r * 2 = 5 * 2 = 10 \text{ cm}$$

para calcular el **lado** l con la fórmula:

$$l = \frac{d\sqrt{2}}{2} \text{ que a su vez es igual a } l = r * \sqrt{2}$$

por ende podemos sacar el **lado** con el radio o la diagonal

$$l = (10 * \sqrt{2}) / 2 = 7.07 \text{ cm}$$

Para el **perímetro**

$$P = 4 * l = 4 * 7.07 = 28.28 \text{ cm}$$

para la **apotema**

$$a = l / 2 = 7.07 / 2 = 3.535 \text{ cm}$$

para el **área**

$$A = l * l = 7.07 * 7.07 = 49.98 \text{ cm}^2$$

finalmente calculando el **área con la apotema** de forma alterna

$$A = (28.28 * 3.535) / 2 = 49.98 \text{ cm}^2$$

$$A = \frac{P \cdot a}{2}$$

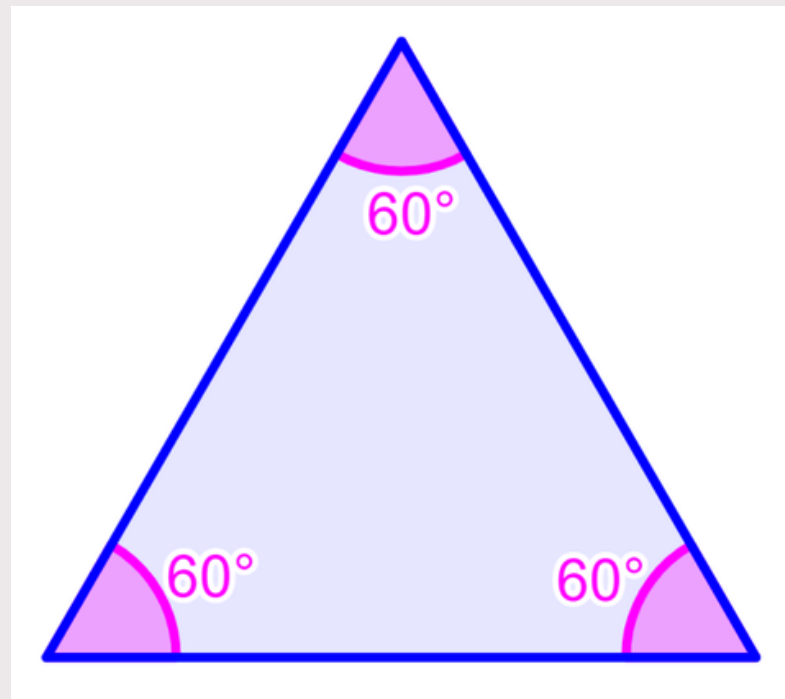
REFLEXIÓN:

Como vimos en el ejemplo anterior con tan sólo un dato podemos investigar y obtener los demás valores de lo que nos están pidiendo mediante el despeje de variables y realizando los cálculos. Como tarea moral repliquen el ejemplo anterior sin ver la solución e incluso pueden replicar el mismo ejemplo con un valor distinto de radio.

ÁNGULOS INTERNOS

Con la siguiente fórmula se puede calcular la medida de los ángulos internos de un polígono regular, importante recalcar que todos los ángulos van a medir igual entonces es posible usar la siguiente fórmula o bien sumarlos todos, se obtendrá el mismo resultado

Suma de las medidas de los ángulos internos s: suma de las medidas de los ángulos internos n: número de lados del polígono	$s = 180^\circ(n - 2)$
--	------------------------



Aplicando la fórmula de "s" para calcular la medida de ángulos internos de este triángulo equilátero, donde $n = 3$ que corresponde al número total de lados, entonces:

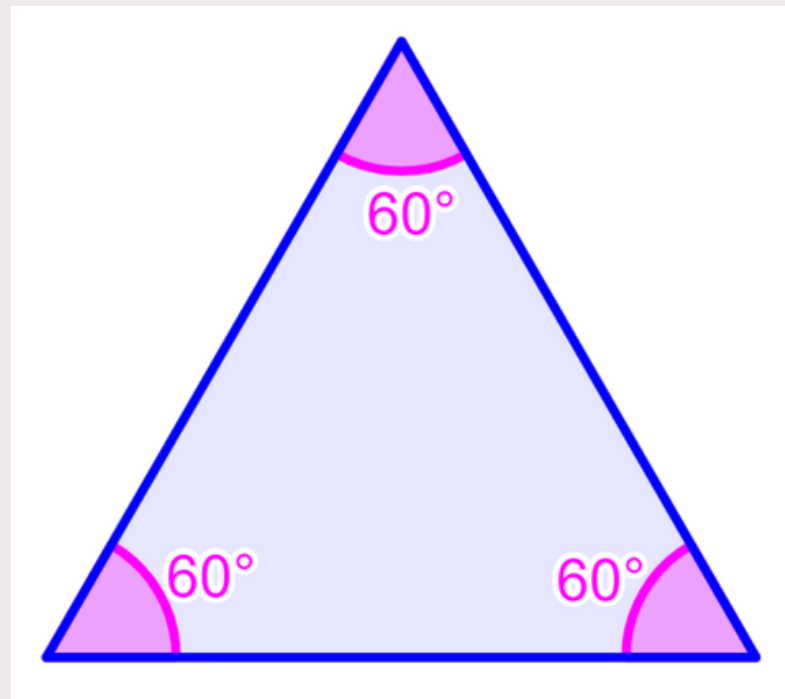
$$s = 180 \cdot (3 - 2) = 180^\circ$$

entonces suma total de ángulos internos de un triángulo equilátero es 180°

ÁNGULOS INTERNOS

Con la siguiente fórmula se puede calcular la medida de un ángulo interno de un polígono regular, entonces obtendremos la medida de un ángulo:

Medida de un ángulo interno i: ángulo interno n : número de lados del polígono	$m \angle i = \frac{180^\circ(n-2)}{n}$
--	---



Aplicando la fórmula para calcular la medida de un ángulo interno de este triángulo equilátero, con $n = 3 =$ número total de lados, entonces:

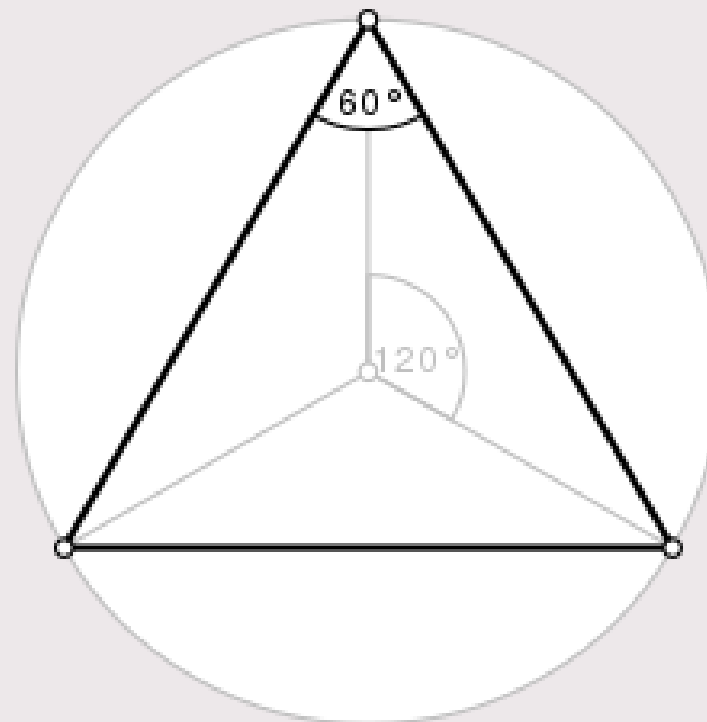
$$m \angle i = 180 \cdot (3-2) / 3 = 60^\circ$$

básicamente sólo debemos sustituir n en la fórmula y obtenemos el valor que ya sabemos que es 60 porque en la imagen viene dada la medida de cada ángulo que es la misma en todos

ÁNGULOS CENTRALES

Con la siguiente fórmula se puede calcular la medida del ángulo central de un polígono regular:

Medida del ángulo central n : número de lados del polígono, c : ángulo central	$m \sphericalangle c = \frac{360^\circ}{n}$
--	---



Aplicando la fórmula para calcular la medida del ángulo central de este triángulo equilátero, con $n = 3 =$ número total de lados, entonces:

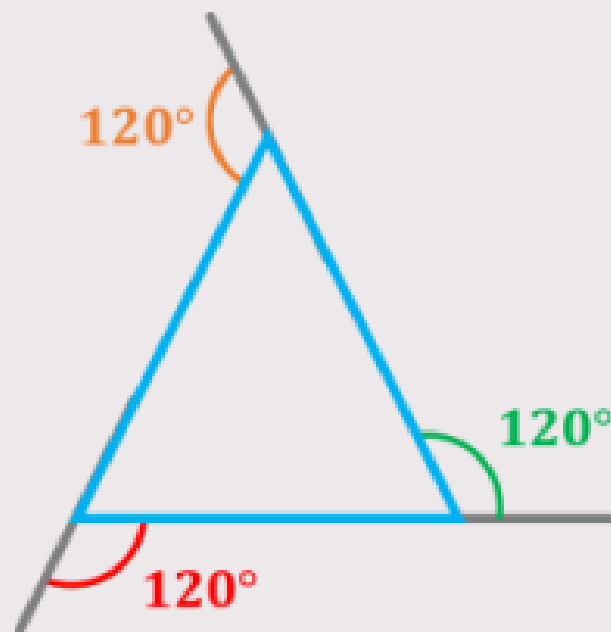
$$m \sphericalangle c = 360 / 3 = 120^\circ$$

básicamente sólo debemos sustituir n en la fórmula y obtenemos el valor de 120° que ya se adelanta en la imagen y ahí se observa bien la ubicación de este ángulo

ÁNGULOS EXTERNOS

Con la siguiente fórmula se puede calcular la medida de un ángulo externo de un polígono regular:

Medida de un ángulo externo n : número de lados del polígono e : ángulo externo	$m \angle e = \frac{360^\circ}{n}$
---	------------------------------------



Aplicando la fórmula para calcular la medida de un ángulo externo de este triángulo equilátero, con $n = 3 =$ número total de lados, entonces:

$$m \angle e = 360 / 3 = 120^\circ$$

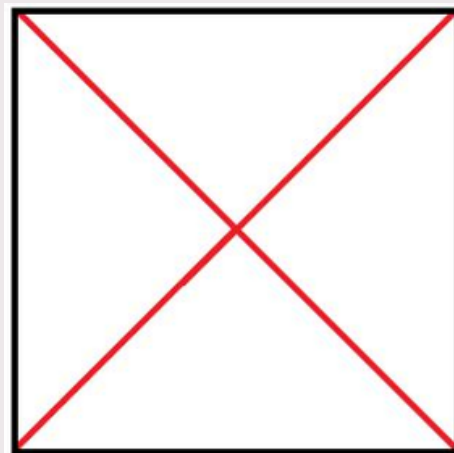
básicamente sólo debemos sustituir n en la fórmula y obtenemos el valor de 120° que ya se adelanta en la imagen y ahí se observa bien la ubicación de este ángulo

Tarea moral: ¿Cuál es la medida de todos los ángulos externos de este triángulo?

DIAGONALES

Con la siguiente fórmula se puede calcular la medida de las diagonales de un polígono y una diagonal se conoce como la línea recta que conecta dos vértices no adyacentes de dicho polígono:

Número de diagonales D: número de diagonales n : número de lados del polígono	$D = \frac{n(n-3)}{2}$
---	------------------------



Para comprender visualmente qué es una diagonal, veamos la imagen de este cuadrado a la izquierda, las líneas rectas rojas corresponden a las diagonales que están conectando los vértices no adyacentes o sea que no conectan un lado, con esto dicho no es tan necesario acudir a la fórmula para saber que un cuadrado tiene 2 diagonales pero

Aplicando la fórmula para calcular la medida de un ángulo externo de este triángulo equilátero, con n = número total de lados, entonces:

$$D = 4 * (4 - 3) / 2 = 4 / 2 = 2$$

por lo tanto $D = 2$

Tarea moral: para un triángulo $D = 0$. Compruébelo con la fórmula y pregúntese por qué NO tiene diagonales.

EJERCICIOS PRÁCTICOS

El MEP tiene un sitio web donde hay ejercicios de marque con X y la debida solución para repasar estos temas, se los dejo a continuación para que los revisen y busquen la manera de comprender la solución de los mismos ya sea por sus propios medios o con la ayuda de tutores:

Área de polígonos

<https://bachillerato.reformamatematica.net/areas-de-poligonos/>

Perímetro de polígonos

<https://bachillerato.reformamatematica.net/perimetro/>

Estimación de áreas

<https://bachillerato.reformamatematica.net/estimacion-de-areas/>