<u>Solucionario examen Matemáticas Educación Diversificada 01-2019</u>

En el siguiente solucionario, se dará una argumentación breve sobre las respuestas del examen y los motivos por los cuales están correctas o incorrecta

Pregunta 1

Se conoce que la ecuación de una circunferencia es:

$r^2=(x-a)^2+(y-b)^2$

Donde:

r: radio de la circunferencia

a: distancia de desplazamiento desde (0,0) hasta el centro de la circunferencia en el eje x

b: distancia de desplazamiento desde (0,0) hasta el centro de la circunferencia en el eje y

De lo anterior se puede inducir que el centro de la circunferencia A=(a,b)

Con base en la Figura 1 se sabe que:

El centro A se localiza en el par ordenado a=2 y b=3, por lo tanto A=(2,3).

El radio de la circunferencia es 3, ya que sobre el eje "y", la circunferencia inicia en 0 y el centro llega hasta y=3, o bien, tomando como referencia el eje "x", la circunferencia inicia en -1, y el centro llega hasta 2, por lo que la distancia total del radio es 3.

Como la ecuación de la circunferencia es $r^2=(x-a)^2+(y-b)^2$, y ya se conocen los valores de r=3, a=2 y b=3, entonces se puede construir la ecuación de la siguiente manera:

$3^2=(x-2)^2+(y-3)^2$, como $3^2=3*3=9$ entonces: $9=(x-2)^2+(y-3)^2$, o $(x-2)^2+(y-3)^2=9$.

Por lo tanto la respuesta correcta es la opción A. $(x-2)^2+(y-3)^2=9$.

Las otras tres opciones sí coinciden con el mismo radio de 3, pero cambia el centro de la circunferencia, según la ecuación mostrada anteriormente.

Respuesta correcta:

B. $(x-2)^2+(y+3)^2=9$. Centro A=(2,-3), la coordenada en "y" del centro está mal.

C. $(x+2)^2+(y-3)^2=9$. Centro A=(-2,3), la coordenada en "x" del centro está mal.

D. $(x+2)^2+(y+3)^2=9$. Centro A=(-2,-3), la coordenada en "x" y en "y" del centro están mal.

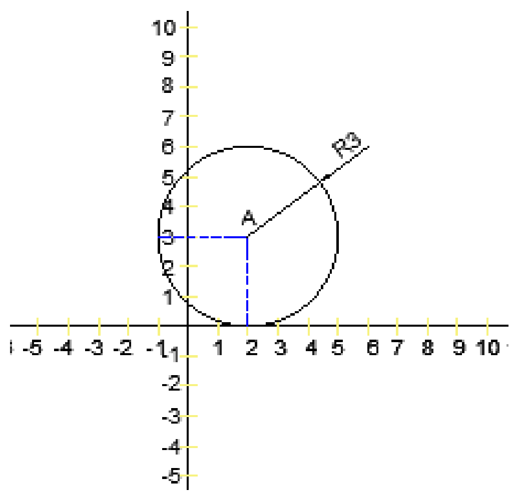


Figura 1. Circunferencia con centro A

Pregunta 2

Se necesita que el centro de la circunferencia sea B=(-3,-2), entonces a=-3 y b=-2, como $r^2=(x-a)^2+(y-b)^2$, nuestra circunferencia será la que tenga una ecuación con $r^2=(x-(-3))^2+(y-(-2))^2$, como --=+, entonces $r^2=(x+3)^2+(y+2)^2$.

Con base en lo anterior se pueden descartar las respuestas:

A. $(x-3)^2+(y-2)^2=4$. Centro $A=(2,3)$, la coordenada en "x" y en "y" del centro están mal.

C. $(x-3)^2+(y-2)^2=25$. Centro $A=(2,3)$, la coordenada en "x" y en "y" del centro están mal.

Entonces quedan solamente dos opciones por evaluar. Ahora el criterio que define cual de las dos opciones es la correcta, se basa en el par ordenado $A= (0,2)$, pues el enunciado indica que el punto A debe estar contenido dentro de la circunferencia.

Se tienen dos opciones:

B. $(x+3)^2+(y+2)^2=4$. Esto es igual a $(x+3)^2+(y+2)^2=2^2$, radio $r=2$.

D. $(x+3)^2+(y+2)^2=25$. Esto es igual a $(x+3)^2+(y+2)^2=5^2$, radio $r=5$.

Para finalmente definir la opción correcta se grafican ambas circunferencias con el mismo centro y radios distintos, y también se debe ubicar el punto $A= (0,2)$, tal y como se muestra en la Figura 2.

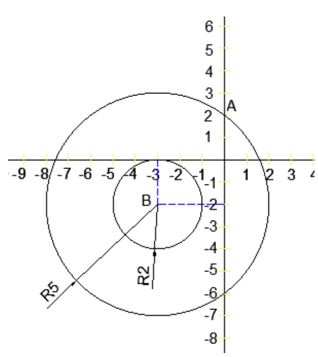


Figura 2. Dos circunferencias con centro B

Claramente se observa que la circunferencia de radio $r=2$, no contiene el punto A, mientras que la circunferencia con radio $r=5$, si contiene el par ordenado $A=(0,2)$, por lo tanto la respuesta correcta es:

Respuesta correcta:

D. $(x+3)^2+(y+2)^2=25$. Esto es igual a $(x+3)^2+(y+2)^2=5^2$, radio $r=5$.

Otra forma de descartar la opción B. $(x+3)^2+(y+2)^2=4$. Esto es igual a $(x+3)^2+(y+2)^2=2^2$, radio $r=2$. Es la siguiente:

Se sabe que el centro esta en $B=(-3,-2)$, o sea que sobre el eje "y" el centro está en $y=-2$, como el radio de la opción b es $r=2$, entonces lo más allá que se puede llegar en "y" es la distancia desde el centro hasta desplazarse un radio, por lo tanto si el centro en "y" es -2, y se mueve 2 hacia arriba, se tiene que la circunferencia llega hasta $y=0$, por lo que es imposible que contenga el punto $A=(0,2)$.

Pregunta 3

Se tiene la circunferencia:

$x^2+y^2=2$, lo que es igual a $x^2+y^2=\text{raíz}(2)$, $\text{raíz}(2)=1{,}41$, entonces:

$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$, $(x-0)^2+(y-0)^2=1{,}41^2$,

Centro $A=(a,b)=(0,0)$ y $r=1{,}41$

Se tienen las siguientes proposiciones:

I. (0,0) es un punto interior a la circunferencia. Como se encontró anteriormente, el centro de l circunferencia esta en el punto (0,0), por ende, este sí es interior a la circunferencia, por lo tanto, II. es verdad.

II. (1,1) es un punto exterior a la circunferencia. Ya se sabe que el radio de la circunferencia mide 1,41, entonces para saber si algún punto externo está dentro o fuera de la circunferencia se debe encontrar la distancia desde el centro, (0,0) hasta el punto, en este caso sería (1,1). Para esto se puede ver el punto como un vértice de un triángulo formado por los lados x=1 y y=1, tal y como se observa en la Figura 3, se toma "h" como la hipotenusa, y por Pitágoras se sabe que $hipotenusa^2=cateto1^2+cateto2^2$, $h=raíz(x^2+y^2)=raíz(2)=1$, entonces la hipotenusa es igual al radio, por lo tanto el punto (1,1) está justo en la circunferencia y no es exterior, por lo que II. es falso.

Respuesta correcta:

C. Solo la I.

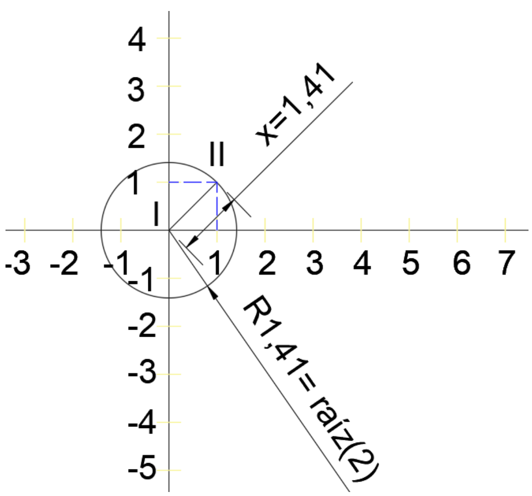


Figura 3. Circunferencia con radio 1,41

Pregunta 4

Se tiene la circunferencia:

$x^2+y^2=4$, lo que es igual a $x^2+y^2=2^2$, entonces:

$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$, $(x-0)^2+(y-0)^2=2^2$,

Centro A=(a,b)=(0,0) y r=2

Además, se tienen las rectas:

y=1, es una recta horizontal, ya que todos los valores de "y" sobre la recta deben ser 1. Se dice que es exterior a la circunferencia.

x=2, es una recta vertical, ya que todos los valores de "x" sobre la recta deben ser 2. Se dice que es secante a la circunferencia.

Ahora se procede a graficar la circunferencia de radio r=2 con Centro A=(a,b)=(0,0), y también se grafican las dos rectas tal y como se muestra en la Figura 4.

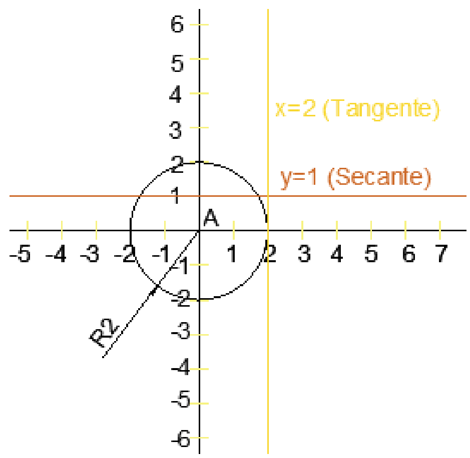


Figura 4. Circunferencia r=2 con dos rectas

Como se aprecia en la Figura 4, la recta x=2, interseca a la circunferencia en un único punto de la misma, por lo que esta se define como una recta tangente. En el caso de la recta y=1, esta toca dos veces la circunferencia por lo que se define como una recta secante. Por lo tanto, ambas suposiciones dadas por el enunciado son falsas, y la opción correcta es:

Respuesta correcta:

B. Ninguna.

Pregunta 5

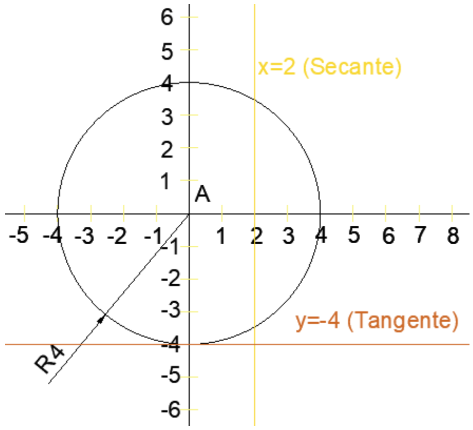


Figura 5. Circunferencia con dos rectas y r=4

Se tiene la circunferencia con centro A=(0,0), mostrada en la Figura 5, donde se observa un radio r=4, no es necesario para la pregunta pero la ecuación sería $x^2+y^2=2^2$.

Se tienen dos rectas:

x=2, se dice que es secante a la circunferencia.

y=-4, se dice que es tangente a la circunferencia.

Al graficar las rectas sobre la circunferencia, se comprueba que como x=2 interseca a la circunferencia en dos puntos, esta se define como una recta secante, y como y=-4 toca la circunferencia en solamente un punto, esta se define como una recta tangente.

Por lo tanto, ambas suposiciones dadas por el problema son verdaderas, y la opción correcta es:

Respuesta correcta:

A. ambas.

Pregunta 6

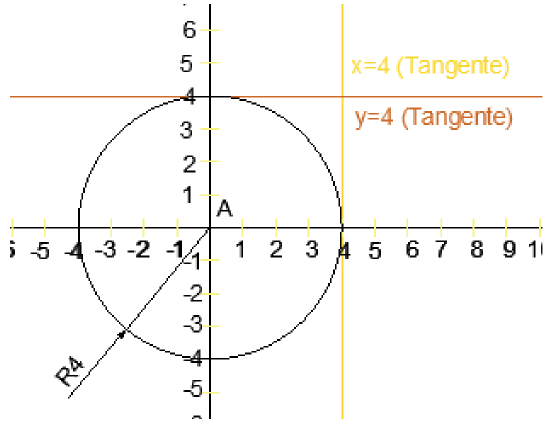


Figura 6. Circunferencia r=4 más dos rectas

Se tiene la circunferencia con centro A=(0,0), mostrada en la Figura 5, donde se observa un radio r=4, no es necesario para la pregunta pero la ecuación sería $x^2+y^2=2^2$.

Se tienen dos rectas:

x=4, se dice que es exterior a la circunferencia.

y=4, se dice que es tangente a la circunferencia.

Al graficar las rectas sobre la circunferencia, se comprueba que como x=4 interseca a la circunferencia en un punto solamente, esta se define como una recta tangente, y como y=4 toca la circunferencia en solamente un punto, esta se define como una recta tangente también.

Por lo tanto, x=4 no es exterior, por lo que la primera suposición es falsa, y y=4 si es tangente por lo que la segunda suposición es verdadera, con base en esto se tiene que la opción correcta es:

Respuesta correcta:

D. solo la II.

Pregunta 7

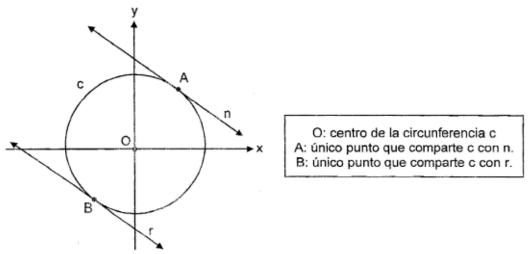


Figura 7. Circunferencia centro O

Con base en la Figura 7, como ambas rectas, “n” y “r”, comparten cada una un único punto con la circunferencia, ambas rectas se definen como tangentes a la circunferencia C. Por definición, una recta tangente a una circunferencia debe ser perpendicular al radio o diámetro en el punto que comparten la recta y la circunferencia.

Se tienen las siguientes proposiciones:

I. Con certeza AO es perpendicular a la recta n.

II. Si AB es un diámetro de la circunferencia, entonces las rectas “n” y “r” son paralelas entre sí.

Como AO es una recta que parte del centro hasta un punto de la circunferencia, AO es un radio de la circunferencia, y como este radio termina en el punto A, que es el que comparte la recta tangente con la circunferencia, se sabe que la recta AO es perpendicular a la recta “n”. Entonces I es verdadero.

Si AB es un diámetro de la circunferencia, y B es el punto compartido entre la tangente “r” y la circunferencia, entonces “r” es perpendicular a AB, de igual manera, como se vio en el inciso anterior, la recta “n” es perpendicular a AO, que es una parte de AB, por lo tanto, hay certeza de que la recta “n” es perpendicular a AB. Como las rectas “n” y “r” son ambas perpendiculares a la misma recta AB, entonces ambas son paralelas entre sí, por lo que II es verdadero.

Entonces la opción correcta es:

Respuesta correcta:

A. ambas.

Pregunta 8

Se tiene la circunferencia: $x^2+(y+2)^2=4$. Centro A=(0,-2), a=0 b=2, r=2. Se quiere trasladar el centro 3 unidades hacia la derecha sobre el eje “x”, entonces, a=0+3=3, se toma +3, pues hacia la derecha sobre el eje “x” las unidades son positivas, por lo tanto el nuevo centro será A=(3,-2). Como la ecuación de la circunferencia es $r^2=(x-a)^2+(y-b)^2$, entonces $(x-3)^2+(y--2)^2=2^2$, $(x-3)^2+(y+2)^2=4$. La respuesta correcta es B. $(x-3)^2+(y+2)^2=4$.

A. $(x+3)^2+(y+2)^2=4$. Centro A=(-3,-2), se desplaza 3 hacia la izquierda en “x”, lo cual es en el sentido inverso al solicitado.

C. $(x+3)^2+(y+5)^2=4$. Centro A=(3,-5), además de desplazar 3 a la izquierda en “x”, sentido contrario al indicado, se desplaza 2 hacia abajo en “y”, lo cual no es solicitado.

D. $(x-3)^2+(y+5)^2=4$. Centro A=(3,-5), además de desplazar 3 a la derecha en “x”, se desplaza 2 hacia abajo en “y”, lo cual no es solicitado.

Pregunta 9

Se tiene la circunferencia: $(x-2)^2+y^2=5$. Centro A=(2,0), a=2 b=0, r=raíz(5). Se quiere trasladar el centro 3 unidades hacia arriba sobre el eje “y”, entonces b=0+3=3, se toma +3, pues hacia arriba sobre el eje “y” las unidades son positivas, por lo tanto el nuevo centro será A=(2,3). Como la ecuación de la circunferencia es $r^2=(x-a)^2+(y-b)^2$, entonces $(x-2)^2+(y-3)^2=$ raíz$(5)^2$, $(x-2)^2+(y-3)^2=5$. La respuesta correcta es:

Respuesta correcta:

B. $(x-2)^2+(y-3)^2=5$.

A. $(x+2)^2+(y+3)^2=5$. Centro A=(-2,-3), se desplaza 4 hacia la izquierda en “x”, lo cual no se solicita, y se traslada 3 hacia abajo sobre y, lo cual es en el sentido inverso al solicitado.

C. $(x+5)^2+(y+3)^2=5$. Centro A=(-5,-3), además de desplazar 7 a la izquierda en “x”, no solicitado, se desplaza 3 hacia abajo en “y”, sentido contrario al indicado.

D. $(x-5)^2+(y-3)^2=5$. Centro A=(5,3), además de desplazar 3 a la derecha en “x”, se desplaza 3 hacia abajo en “y”, lo cual si es correcto.

Pregunta 10

Se tiene el polígono irregular mostrado en la Figura 8, donde se solicita obtener el área de dicha figura. Entonces para resolver el problema se debe descomponer el polígono en polígonos regulares. Como se observa en la Figura 8, se puede ver la figura como un rectángulo, mostrado en color naranja, más la mitad de un rectángulo (triángulo), marcado con color vino. Entonces el rectángulo inferior, se compone 2 filas de 8 cuadritos cada una para un total de 16 cuadritos, los cuales se pueden contar fácilmente. Por otra parte, el área total del rectángulo superior, consta de 3 filas de cuatro cuadritos, para un total de 12 cuadritos dentro del rectángulo. Ahora bien, de este último rectángulo de 12 cuadritos, solamente la mitad (un triángulo) forma parte del polígono irregular azul, por lo que el área que aporta este al polígono sería únicamente la mitad igual a 12/2=6 cuadritos. Finalmente, el área del polígono sería la suma de los 18 cuadritos del rectángulo grande inferior más los 6 cuadritos del triángulo superior, Área polígono= 16+6=22 cuadritos. Por lo tanto, la opción correcta es:

Respuesta correcta:

C. 22.

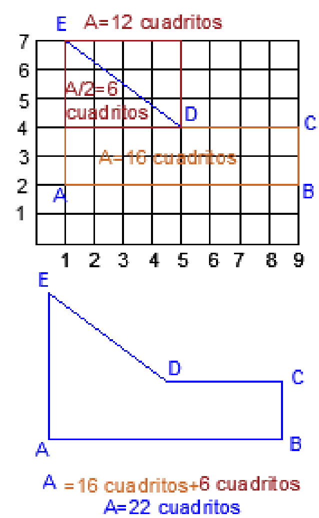


Figura 8. Polígono irregular

Pregunta 11

Se tiene el mismo polígono irregular, pero en este caso se solicita el perímetro del mismo, entonces se procede de la siguiente manera:

Como se observa en la Figura 9, el perímetro de dicho polígono se conforma por la suma de las dimensiones de 5 rectas diferentes las cuales son: AE, AB, BC, CD y DE, de éstas cinco rectas, se conoce la dimensión de cuatro de ellas, y solamente se desconoce la dimensión de la recta DE, la cual es la hipotenusa del triángulo DEX como se observa en la Figura 9, entonces lo primero es identificar las dimensiones de las otras rectas contando cuantos lados de los cuadritos componen estas rectas, tal y como se muestra en la Figura 9. Luego se identifican las dimensiones de los catetos del triángulo DEX, EX=3 y DX=4. Entonces usando el teorema de Pitágoras que dice: $hipotenusa^2=cateto1^2+cateto2^2$ se puede encontrar el valor de la hipotenusa, tal y como se muestra en la Figura 9, y de ahí se obtiene el valor de la hipotenusa que es igual a DE=5. Ya que se conocen las dimensiones de las 5 rectas, finalmente se suman las 5 dimensiones mostradas en la Figura 9, y se obtiene el perímetro del polígono Perímetro=24. Por lo tanto, la opción correcta es:

Respuesta correcta:

C. 24.

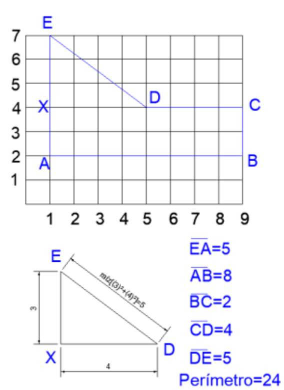
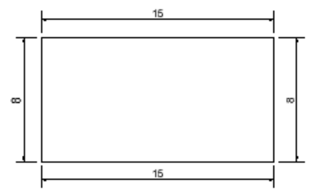


Figura 9. Polígono irregular y triángulo

Pregunta 12

Se tiene un área rectangular de 15 metros por 8 metros. Esta área quiere acondicionarse con césped, el cual tiene un costo de 18 000 colones por cada metro cuadrado. Entonces, para encontrar el costo del césped, se debe obtener en primera instancia la cantidad de metros cuadrados, que es el área del rectángulo, y una vez se tiene el área en metros cuadrados se multiplica por el costo por metro cuadrado y de ahí se obtiene el costo total, tal y como se muestra en la Figura 10



$$\boxed{Area=8\ m x 15\ m=120\ m^2}$$

$$\boxed{Costo=120\ \cancel{m^2}\cdot\frac{18\ 000\ colones}{\cancel{m^2}}=2\ 160\ 000\ colones}$$

Figura 10. Área rectangular

Entonces, la respuesta correcta es:

Respuesta correcta:

D. 2 160 000 colones.

Pregunta 13

Se sabe que la medida de los ángulos internos (θ) de un polígono regular es:

$$\theta=180-\frac{360}{n}$$

Donde "n" es igual al número de lados.

Entonces para encontrar el número de lados "n" a partir de un ángulo interno (θ) conocido,

$$n=\frac{360°}{(180°-\theta)}$$

se despeja n de la ecuación anterior, entonces se tiene que:

$$n=\frac{360°}{(180°-120°)}$$

$$n=6\ lados$$

O bien, si se conoce de memoria los ángulos de polígonos regulares:

Número de lados (n)	Ângulo interno (a)
—	—
—	—
3	60
4	90
5	108,00
6	120
7	128,5714286
8	135
9	140,00
10	144
11	147,27
12	150,00
13	152,3076923
14	154,2857143
15	156,00
16	157,5
17	158,82
18	160
19	161,05
20	162
21	162,86
22	163,64
23	164,35
24	165
25	165,60

Ahora, a partir de conocer el ángulo interno de 120° se sabe que el polígono tiene 6 lados, y cada lado vale 5, entonces el perímetro es:

Perímetro=6x5=30.

La respuesta correcta es:

Respuesta correcta:

D. 30.

Pregunta 14

Se tiene que la apotema de un cuadrado es 3, y la apotema es la medida más pequeña desde el centro hasta cualquiera de los lados del cuadrado, o bien desde el centro hasta el lado, formando un ángulo de 90° con el lado del cuadrado, tal y como se muestra en la Figura 11, entonces se puede decir que la apotema mide la mitad de un lado del cuadrado, o dicho de otra forma el lado de un cuadrado mide el doble de su apotema Lado=2*Apotema, en este caso Lado=2*3=6. Ahora bien, el área de un cuadrado es la multiplicación de sus lados Área=6*6=6^2=36. Por lo tanto, la respuesta correcta es:

Respuesta correcta:

D. 36.

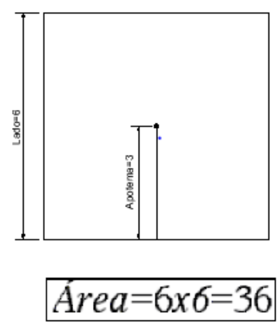


Figura 11. Cuadrado con apotema de 3

Pregunta 15

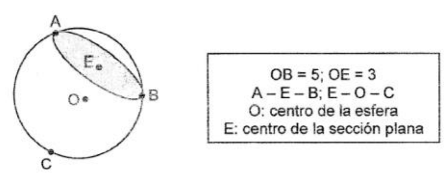


Figura 12. Esfera con corte plano

De la Figura 12, se dice que AEB y EOC son rectas, por lo tanto, AEB es un diámetro de la circunferencia plana de corte y OC es un radio de la esfera, pues es una recta que parte del centro hasta un punto en la superficie del extremo de la esfera.

El problema pide la longitud de la sección plana de centro E, que es una circunferencia, por longitud se entiende el perímetro de dicha circunferencia dado por Perímetro=2πr, entonces lo que se debe encontrar es el valor del radio de la sección plana mostrada en la parte inferior de la Figura 13. En la parte superior de la Figura 13 se observa la esfera con la sección plana perpendicular a los ojos del lector, por lo que la sección plana se observa como una recta, se muestran los valores de las rectas EO=3 y BO=5, valores dados por el problema, y el radio de la sección plana se muestra con la incógnita "x", la cual puede encontrarse utilizando el teorema de Pitágoras $\text{hipotenusa}^2=\text{cateto1}^2+\text{cateto2}^2$, ya que BEO es un triángulo formado por las dos rectas conocidas y el radio "x", entonces $5^2=3^2+x^2$, despejando $x^2=5^2-3^2$, sacando raíz cuadrada a ambos lados $x=\text{raíz}(5^2-3^2)=\text{raíz}(16)=4$, entonces EB=4 que es igual al radio r=4.

Finalmente, Perímetro=2πr=2π4=8π. Por lo tanto, la respuesta correcta es:

Respuesta correcta:

C. 8π.

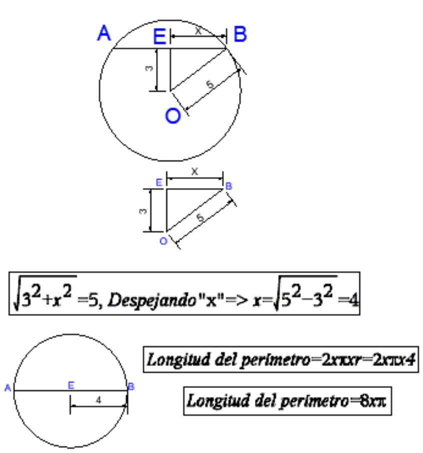


Figura 13. Sección plana de la esfera

Pregunta 16

De la Figura 12, se observa como OB al igual que OC con radios de la esfera, si se sabe el valor de OB=5, y se sabe que el diámetro es dos veces el radio, entonces el diámetro de la esfera es d=2OB=2x5=10. Por lo tanto, la opción correcta es:

Respuesta correcta:

C. 10.

Pregunta 17

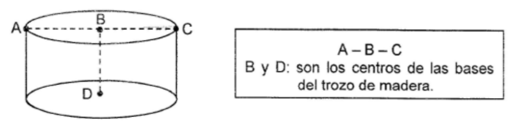


Figura 14. Cilindro de madera

Se dice que AB=BD=50 cm. Se pide la altura del trozo de madera cilíndrico, la altura se define como una distancia recta perpendicular a los centros de las caras superior e inferior del cilindro. Con base en dicha definición, y usando la información de la Figura 14, que indica que B y D son los centros de las bases del cilindro, la altura esta denotada por la recta BD, la cual el problema nos dice que tiene una dimensión de 50 cm, entonces la altura es igual a BD=50 cm. Por lo tanto, la respuesta correcta es:

Respuesta correcta:

B. 50 cm.

Pregunta 18

Ahora se necesita encontrar el diámetro del trozo de madera cilíndrico, el cual se define como la distancia de extremo a extremo de una recta sobre la base plana del cilindro, con la condición de que pase por el centro de dicha sección, entonces, la recta ABC cumple las condiciones para ser un diámetro del cilindro. Se conoce que AB=50 cm, y AB es la mitad el diámetro, o sea que es un radio del cilindro, y como el diámetro es dos veces el radio d=2r, entonces d=2x50 cm=100 cm, por lo tanto la opción correcta es:

Respuesta correcta:

C. 100 cm.

Pregunta 19

Se tiene un cilindro de madera con dimensiones desconocidas, a este se le hacen cuatro cortes perpendiculares a sus bases a 25 cm de distancia desde el centro, para formar un cubo, ya que el cubo tiene seis caras iguales, se puede utilizar cualquiera de las caras para encontrar el área solicitada. En este caso, la manera más fácil es ver el cilindro desde la parte superior, lo que se observa como una circunferencia, tal y como se ve en la Figura 15, y los cortes, mostrados en azul, se observan como rectas distanciadas a 25 cm del centro, y estos cortes forman la cara superior del cubo, que termina siendo una geometría cuadrada. Se puede ver que la distancia de 25 cm desde el centro es la apotema de un cuadrado, por lo que el lado del cuadrado es dos veces la apotema, Lado=2*apotema=2*25 cm=50 cm^2. Se sabe que el área de un cuadrado es Área=L*L=L^2=50 cm*50 cm=50^2 cm=2500 cm^2. Como el cuadrado es una cara del cubo, entonces el área de una de las caras del cubo es 2500 cm^2. La opción correcta es:

Respuesta correcta:

C. 2500 cm^2.

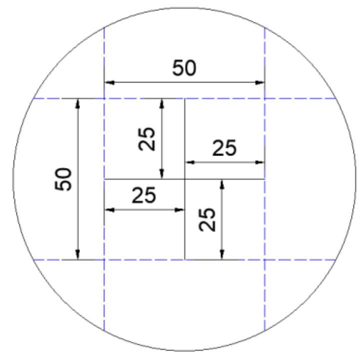


Figura 15. Cilindro desde arriba con cortes perpendiculares a la base

Pregunta 20

Se tiene la función f(x): D-->{0}, lo que significa que el dominio de f, que es lo mismo que los posibles valores de x, deben dar como resultado 0, o bien 0 es el único valor dentro del co-dominio de f(x). En otras palabras, se debe encontrar los valores posibles de "x", para que la función de cómo resultado únicamente f(x)=y=0.

Se tienen las siguientes opciones:

I. $-1 \in D$	II. $\{1\} \subset D$	III. $D = \{-1\} \cup \{1\}$

I. Dice que -1 pertenece al dominio de la función.

II. Dice que 1 es un subconjunto del dominio de la función.

III. Dice que -1 unido a 1 es igual al dominio de la función.

El primer paso es factorizar la función. Se tiene que la función es:

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x+1}$$

Por definición se sabe que la diferencia de cuadrados se factoriza de la siguiente manera:

$$a^2-b^2=(a+b)*(a-b)$$

Entonces, como $1^2=1$, podemos ver el numerador x^2-1 como x^2-1^2, y este último se puede ver como una diferencia de cuadrados donde a=x y b=1, entonces al factorizar queda la siguiente expresión:

$$x^2-1^2=(x-1)*(x+1)$$

Luego, al sustituir en la función se obtiene:

$$f(x)=\frac{(x-1)\cdot(x+1)}{x+1}$$

Como se observa en la función anterior, el paréntesis derecho del numerador es exactamente igual al denominador “x+1”, y como los paréntesis del numerador se multiplican entre sí, se puede eliminar el “x+1” de arriba y de abajo, para obtener finalmente la siguiente función equivalente:

$$f(x)=x-1$$

Ahora se vuelve a la premisa inicial, que solicita que f(x)=y debe ser 0, entonces sustituimos f(x)=y y luego “y=0” tal y como se muestra enseguida:

$$y=x-1$$

$$0=x-1$$

Finalmente despejando “x”, se obtiene el valor para el dominio de la función:

$$1=x$$

I. Es falso, ya que -1 no pertenece al dominio de la función.

II. Es verdadero, puesto que 1 es un subconjunto del dominio de la función, como se demostró anteriormente.

III. Al igual que en I. es falso, ya que -1 no pertenece al dominio de la función.

Por lo tanto, la opción correcta es:

Respuesta correcta:

B. Solo la II.

Pregunta 21

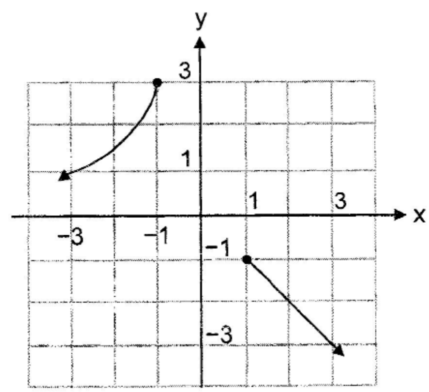


Figura 16. Gráfica de la función f

Se pide encontrar el dominio de la función mostrada en la gráfica. Como es conocido, el dominio es el conjunto de números posibles que puede tener el valor de la variable independiente “x”. Si se observa la gráfica de la Figura 16, se ve que a función se compone de dos curvas, en el segundo cuadrante, superior izquierdo, se tiene una curva asíntota al eje x, es decir se aproxima al eje “x” pero nunca llega a intersecarlo, por lo tanto, se mueve infinitamente hacia la izquierda, esto se sabe por la flecha que indica que la curva continua es la dirección de dicha flecha. Luego, se observa que la misma curva termina en x=-1, como el punto está relleno significa que -1 es parte del dominio. Eso significa que el dominio inicia en -∞, abierto, pues infinito positivo o negativo siempre va abierto, nunca se incluye en el dominio, y termina en -1 cerrado, pues el punto esta relleno como se indicó anteriormente, matemáticamente lo anterior se muestra de la siguiente manera:]-∞,-1]. Ahora bien, se sigue con la recta del cuarto cuadrante, inferior derecho, donde se observa que el dominio inicia en x=1, con el punto relleno, lo que significa que es parte del dominio, y la flecha indica que este continúa hasta el infinito positivo, lo que matemáticamente se traduce a lo siguiente [1,+∞[. Como el dominio está compuesto por dos intervalos, se deben indicar esto mediante la simbología de unión con una letra "U" mayúscula, finalmente el dominio se denota de la siguiente forma:

]-∞,-1] U [1,+∞[

Por lo tanto, la opción correcta es:

Respuesta correcta:

D.]-∞,-1] U [1,+∞[.

Pregunta 22

Ahora se pide el ámbito, o co-dominio de la función, que es básicamente el conjunto de posibles valores que puede tomar la variable dependiente "y". Se procede de la misma manera que en la pregunta 21, pero en lugar de buscar los valores sobre el eje "x" se buscan los valores sobre el eje "y". Iniciando igual por el segundo cuadrante, se había dicho que la curva es asíntota al eje x, o sea se acerca y se acerca lo más próximo, pero sin tocar el eje "x". El eje "x" es la recta donde "y" vale 0. Entonces, similar al problema 21, el ámbito de la función inicia en y=0, pero como no llega a tocar el eje x este intervalo será abierto, denotado por el paréntesis cuadrado abierto. Ahora se busca el punto cerrado, en el problema anterior se vio que el valor de x=1 para este punto, ahora se ve el mismo punto, pero se busca el valor de "y", con base en la Figura 16, se observa que y=3 en ese punto, y al igual que el problema anterior como el punto está relleno, este intervalo va cerrado, matemáticamente lo anterior se traduce a lo siguiente:]0,3].

Ahora se pasa al cuarto cuadrante, se tiene un punto cerrado que indica que el valor si forma parte del ámbito, y para este punto "y" toma el valor de -1. Como la flecha indica que se sigue hasta infinito, y para el eje "y" el sentido es hacia abajo significa que el intervalo inicia en -∞, y ya se conoce que infinito no forma parte del intervalo, por lo que lo anterior se traduce a [-∞,-1[, se pone -∞ al inicio pues se debe respetar el orden de la recta numérica. Ahora bien, ya se sabe como unir dos intervalos, por lo que el ámbito de la función es el siguiente: [-∞,-1[U]0,3]. En este caso se coloca [-∞,-1[de primero, pues se debe respetar el orden de la recta numérica, donde los negativos están a la izquierda y positivos a la derecha. Por lo tanto, se tiene que la respuesta correcta es:

Respuesta correcta:

D. [-∞,-1[U]0,3].

Pregunta 23

Se tiene que f:[5,+∞[-- >P, lo que significa que el dominio de la función es D=[5,+∞[, o sea que "x" puede tomar valores desde 5 inclusive hasta +∞, y P es el ámbito de la función. La función está dada por:

$$f(x)=\sqrt{x-1}$$

Además, se tiene una función desconocida "r", donde se dice que el dominio de "r" es igual al ámbito de "f", entonces el dominio de "r" es D=P. Por lo tanto se debe encontrar el ámbito de "f" igual a P, para obtener el dominio de "r". Entonces para encontrar el ámbito se debe evaluar la función en su dominio. El dominio inicia en 5 positivo, entonces se evalúa la función con x=5, y se encuentra un primer valor del ámbito de "f", tal y como se muestra enseguida.

$$f(x)=\sqrt{x-1}=\sqrt{5-1}=\sqrt{4}=2$$

Ahora se encuentra un primer valor para P, igual a 2. Se puede inducir que la función es creciente, pero para comprobarlo, se evalúa otro valor al azar mayor a 5 y menor que +∞, por ejemplo 10, entonces al evaluar la función en x=10 se obtiene lo siguiente:

$$f(x)=\sqrt{x-1}=\sqrt{10-1}=\sqrt{9}=3$$

Con esto se comprueba que la función incrementa el ámbito, así como se incrementa el dominio.

Si se evalúa la función en x=+∞, se obtiene f(x)= +∞, por lo tanto el ámbito de la función "f" es P=[2,+∞[.

Por lo tanto, la opción correcta es la B. $\{x \mid x \in \mathbb{R}, x \geq 2\}$, lo que significa que el ámbito está definido por "x" tal que "x" pertenece al conjunto de números reales, con la restricción de que "x" debe tomar valores mayores o iguales que 2.

Respuesta correcta:

A. $\{x \mid x \in \mathbb{R}, x \leq 2\}$, es incorrecta pues indica que los valores de "x" deben ser menores o iguales que 2, lo que incluye valores fuera del dominio.

B. $\{x \mid x \in \mathbb{R}, x \geq 2\}$, es la correcta por lo descrito anteriormente.

C. $\{x \mid x \in \mathbb{R}, x \leq 3\}$, es incorrecta pues indica que los valores de "x" deben ser menores o iguales que 3, lo que incluye valores fuera del dominio.

D. $\{x \mid x \in \mathbb{R}, x \geq 3\}$, es incorrecta pues indica que los valores de "x" deben ser mayores o iguales que 3, lo que deja al 2 por fuera.

Pregunta 24

Se tiene la función desconocida "g", donde se dice que su dominio es la intersección del dominio de "f" que es Dominio= [5,+∞[, con el ámbito de "j". Se dice que el dominio de "j" es Dominio=[-3,2]. También se indica que j(x)= -x+4. Entonces se debe evaluar los extremos del dominio en la función "j" para obtener el ámbito de la misma, entonces evaluamos j(x) para x=-3 y para x=-2 tal y como se muestra a continuación:

$$j(-3)= -(-3)+4=+3+4=7$$

$$j(2)= -(2)+4=2$$

Entonces, el ámbito de la función "j" esta dado por:

$$P=[2,7].$$

Ahora se retoma la pregunta original, que busca el dominio de "g" que es la intersección del dominio de "f" y el ámbito de "j", o sea la intersección de $[5,+\infty[$ con $[2,7]$. En otras palabras, la intersección es el intervalo compartido por los dos intervalos, tal y como se muestra en la Figura 17, la intersección se identifica como el intervalo compartido marcado con líneas amarillas.

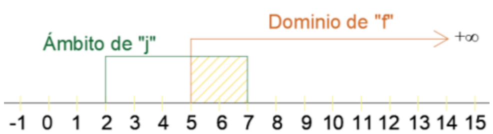


Figura 17. Intersección de do intervalos

Como se muestra en la Figura 17, el intervalo marcado en amarillo va desde el 5 hasta el 7, y ambos extremos forman parte el intervalo [5,7], por lo que este es cerrado en sus extremos. Por lo tanto, se tiene que la respuesta correcta es:

Respuesta correcta:

D. [5,7]. Correcta por lo descrito anteriormente.

A. [2,3]. Esta mal pues incluye un intervalo que está completamente fuera del buscado.

B. [2,5]. Esta mal pues incluye un intervalo que está completamente fuera del buscado, y el único número correcto sería el 5.

C. [3,6]. Esta mal pues incluye un intervalo que está completamente fuera del buscado, y solo el 5 y el 6 forman parte del intervalo buscado.

Pregunta 25

I. $D=\{-3,3\}$, $E=\{0\}$, relación de D en E: $J=\{(x,y): y=x^2-9\}$

II. $A=\{1,4\}$, $B=\{0,3\}$, relación de A en B: $T=\{(x,y): y=-x+1\}$

Se tienen las relaciones anteriores, se busca responder cuales son funciones. En la primera relación se tienen dos valores para x, $x=-3$ y $x=3$, y se dice que al evaluar los dos valores se tiene el mismo resultado para ambas $y=0$. Para verificar esto se evalúa $x=-3$ y $x=3$ en la relación $y=x^2-9$, para $x=-3$ se tiene que $y=-3^2-9$, al ser exponente par, un número negativo termina siendo positivo, pues negativo y negativo es positivo, entonces se tiene $y=9-9=0$. Ahora para $x=3$, $y=3^2-9=9-9=0$. Se tiene que ambas relaciones dan como resultado 0, por lo que I. sí es una función. Ahora para II. $y=-x+1$, con $x=1$, $y=-1+1=0$, la relación es correcta, pues al evaluar el primer término de A en T es igual al primer término de B, ahora con $x=4$, $y=-4+1=-3$, ya que el resultado de la relación es negativo y el segundo término de B es positivo, la relación no se cumple pues al evaluar el segundo termino de A no se obtiene exactamente el segundo término de B, para que sea función $B=\{-3,0\}$, por lo que II. no es verdadera. Por lo tanto, la respuesta correcta es:

Respuesta correcta:

C. solo la I.

Pregunta 26

Se tienen las dos funciones representadas por los gráficos mostrados en la Figura 18.

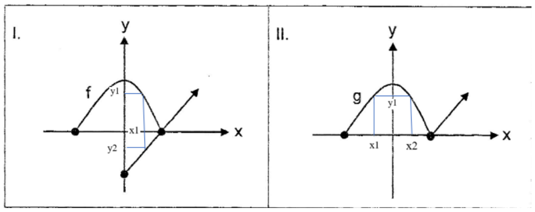


Figura 18. Gráficos de curvas y rectas

Por definición, una función es la relación donde la variable independiente, en este caso "x" se relaciona únicamente con un valor dependiente, en este caso "y", en otras palabras, si se evalúa un valor "x" en la relación no se pueden obtener dos o más valores de "y" para dicha "x". En cambio, la variable dependiente si puede relacionarse a dos o más valores independiente, en otras palabras, dos valores distintos de "x" sí pueden dar como resultado el mismo valor de "y". Ahora si se ve la Figura 18, se ve como en I., se tienen dos valores de "y", y1 y y2, asociados al mismo valor de "x", x1, entonces, esta no es una función. En el caso de II., se observa como dos valores de "x", x1 y x2 dan como resultado el mismo valor de "y", y1, por lo que esta si es una función. Este último criterio es permitido, pero no necesario, es decir si fuera el caso que "x" se asocia a un solo valor de "y", y que no hay un "y" asociado a dos "x" distintas, sigue siendo una función. Por lo tanto, la respuesta correcta es:

Respuesta correcta:

D. solo la II.

Pregunta 27

I.

x	−3	0	3	0
y	−4	2	6	1

II.

x	1	2	3	4
y	1	1	1	1

I. Sí es una función del tipo no lineal, ya que, aunque no se conoce, se tiene una relación entre la variable independiente y la variable independiente, donde cada valor de variable dependiente tiene asociado únicamente un valor de variable independiente. Es no lineal, ya que conforme se incrementa el valor independiente, el dependiente no tiene tendencia específica, lo que se sabe pues inicia en -4 luego sube a 2 luego a 6 y por último baja a 1.

II. También es una función, esta es del tipo lineal con la forma mx^n+b, con n=0, lo que termina siendo una recta horizontal a la altura de y=1, entonces para todo valor de "x" el "y" siempre vale 1.

Respuesta correcta:

A. ambas.

Pregunta 28

Se tienen dos funciones, $f(x)=x^2-2$ y $g(x)=x-1$, se busca (f o g)(x) que es lo mismo que evaluar g(x) en f(x), en otras palabras se puede hacer una sustitución x=g(x)=(x-1) entonces se evalúa x=x-1 en f(x), tal como se muestra enseguida:

$$f(x)=x^2-2,\ x=x-1, \text{ entonces:}$$

$$(f \circ g)(x)=f(x-1)=(x-1)^2-2,$$

por fórmula notable se sabe que:

$$(a-b)^2=a^2-(2*a*b)+b^2$$

entonces:

$$(x-1)^2=x^2-2x-1$$

Finalmente:

$$f(x-1)=(x-1)^2-2=(x^2-2x-1)-2= x^2-2x-3,$$

$$(f \circ g)(x)=x^2-2x-3$$

Por lo tanto se sabe que la respuesta correcta es:

Respuesta correcta:

D. x^2-2x-3.

Pregunta 29

I.

x	0	1	2	3
f(x)	− 4	2	6	1

II.

x	0	1	2	3
g(x)	3	0	1	2

Se tienen las siguientes proposiciones:

I. (f o g) (3)=2. Como se vio en la Pregunta 28, (f o g) (x) es igual que f (g(x)), entonces en este caso, se busca encontrar f(g(3)), de la función II., se sabe que g(3)=2. Entonces (f o g) (3)=f(2), si se ve la función I. se puede encontrar que f(2)=6, entonces (f o g) (3)=6, por lo que I. es falso.

II. Es factible efectuar (g o f) (x). Para ninguna de las funciones, ni "f" ni "g", se tienen las relaciones en términos de "x", por ende, no es factible efectuar (g o f) (x), por lo que II. es falso.

Respuesta correcta:

B. ninguna.

Pregunta 30

Por definición la función lineal tiene la forma y=m*x+b, donde "m" es la pendiente, y b es la intersección con el eje "y", por definición la pendiente "m" es el cambio en "y" respecto al cambio en "x", que se representa de la siguiente manera:

$$m=\frac{y2-y1}{x2-x1}$$

Se tiene que la pendiente de la gráfica es:

$$m=-3=-3/1$$

lo que significa que la gráfica es decreciente, esto se sabe por el signo negativo, y también se sabe que por cada 3 que se baja en "y", se avanza solamente 1 a la derecha en "x". Además, el par ordenado (1,6) pertenece a la gráfica, o sea que un punto de la gráfica es en x=1 y y=6. Sabiendo esto se procede de la siguiente manera, se grafica el punto 1, tal y como se muestra en la Figura 19, luego para poder graficar el punto dos, como ya se sabe que la pendiente es m=-3, desde el punto 1, se mueve 3 unidades hacia abajo en "y" y solamente una unidad a la derecha en "x", tal y como lo muestran las flechas en la Figura 19, se ahí se puede graficar el punto 2, luego se extiende la gráfica lineal sobre uniendo los puntos y llegando hasta los ejes "x" y "y", de ahí se observa como la gráfica choca con el eje "x" en 3, y en este punto y=0. Entonces, la gráfica interseca el eje de las abscisas "x" en el par ordenado (3,0). Otra manera es la siguiente, se inicia igual identificando el punto 1, en (6,1) tal y como lo muestra el ejercicio. Entonces se sabe que por cada que se mueva tres hacia abajo en "y" se mueve solamente uno a la derecha en "x". Entonces, para intersecar el eje "x", se debe tener y=0, sabiendo esto y sabiendo que el punto 1 está en y=6, y como la pendiente es 3 en y por cada 1 en x, se puede plantear que para llegar al eje "x", debemos movernos 6 en "y", y si se mueve 6 en "y" se mueven entonces 2 en "x", partiendo del punto 1, donde x=1, y sabiendo que nos movimos 2 en "x" para chocar con el eje "x", se tiene que x=1 más los dos hacia la derecha en "x" para chocar con el eje, se tiene que x=1+2=3, entonces se llega a la misma respuesta, donde la gráfica choca con el eje x en el par ordenado (3,0). Por lo tanto, la respuesta es:

Respuesta correcta:

C. (3,0).

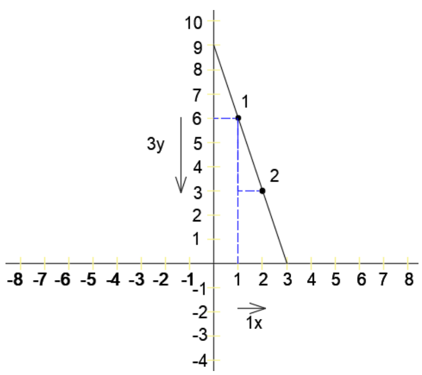


Figura 19. Gráfica función lineal

Pregunta 31

Se tiene la función de forma $f(x)=ax^2+bx+c$ mostrada en la Figura 20.

Como se muestra en la gráfica de la Figura 20, f(-2)=f(2)=-3, f(-1)= un valor entre -1 y -2 aproximadamente -1,25 y f(0)=-1.

Respuesta correcta:

Se tienen las siguientes condiciones para ver cuál es verdadera:

A. f(-1) >f(2), significa que: -1,25>-3, es verdadero. Correcta.

B. f(-2)<f(2), significa que: -3<-3, es falso, pues son iguales.

C. f(-1) =f(0), significa que: -1.25=-1, es falso, -1 es mayor que -1,25.

D. f(-1)<f(2), significa que: -1,25<-3, es falso, pues es lo contrario.

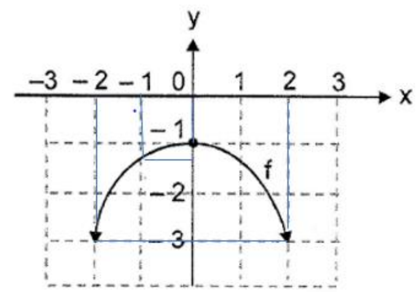


Figura 20. Función cuadrática cóncava hacia abajo

Pregunta 32

Se tiene la misma función de la Figura 20, es conocido que tiene la forma $f(x)=ax^2+bx+c$, donde el símbolo de "a", define si es cóncava hacia abajo, como en el presente caso, donde "a" debe ser negativo para que se cumpla dicha concavidad, o cóncava hacia arriba, en el caso contrario que "a" sea un valor positivo. Por otra parte, se sabe que "c", es el valor donde se interseca el eje "y", por lo que esta intersección siempre es el par ordenado (0,c), ya que cuando x=0, siempre se tiene que "c" es el valor donde interseca "y". Con base en la gráfica de la Figura 20, se puede intuir lo siguiente:

1. Ya que la parábola es cóncava hacia abajo, por definición el valor de "a" debe ser positivo.

2. Si buscamos la intersección de la parábola con el eje "y", como se mencionó

anteriormente, este valor será el “y” asociado a x=0, entonces como se muestra en la Figura 20, cuando x=0, se tiene que y= -1, y como se dijo, este valor de “y” es igual al “c” de la ecuación, entonces c= -1.

Respuesta correcta:

Se tienen las siguientes condiciones:

A. a>0. Esta mal, ya que si “a” es mayor que uno la parábola es cóncava hacia arriba. Correcta.

B. a<0. Está bien, ya que, si “a” es negativo, la parábola es cóncava hacia abajo, lo que es real.

C. c=0. Si c=0, la intersección con el eje “y” debe ser cero, lo que no es cierto.

D. c>0. Ya se descubrió que c=-1, por lo tanto “c” no es mayor que cero, puesto que es negativo.

Pregunta 33

Se tienen las siguientes proposiciones respecto a la función de la Figura 20:

I. f(x) <0, quiere decir que todos los posibles valores de “y” asociados a cualquier “x” evaluado en la función resultan ser valores negativos.

II. Un intervalo donde f es decreciente es [1,5], quiere decir que un subconjunto del dominio de f determinado por el intervalo representa una parte de la función que decrece a lo largo del eje “x”.

Como se observa en la Figura 20, el vértice es -1, y todos los posibles valores de “y” están por debajo de -1, lo que significa que todos los valores de f resultan ser negativos y menores que 0, por lo que I. es correcto.

A partir del mismo vértice, se puede ver que a la izquierda del vértice, la función crece, es decir desde -∞ hasta 1, conforme la función avanza en “x”, los valores de “y” aumentan, y del otro lado, a la derecha del vértice, conforme se avanza en “x”, los valores de y disminuyen. Como el intervalo [1,5] está a la derecha del vértice, y en este tramo los valores de “y” disminuyen, entonces es verdad que la función es decreciente dentro de este intervalo, por lo que II. también es correcto. Entonces, finalmente se tiene que la respuesta correcta es:

Respuesta correcta:

A. ambas.

Pregunta 34

Se tienen las siguientes funciones:

$f(x)= -x^2-4$ $\qquad\qquad$ $g(x)=3x+2$

Se busca saber si las condiciones son verdaderas:

I. La gráfica de g es decreciente.

II. El ámbito de f es [-4,+∞[.

La función “g” es una función lineal de la forma: mx+b, donde “m” es la pendiente y si se recuerda, cuando x=0 se obtiene la intersección de la función con el eje “y”, entonces debido a esto se sabe que “b” es la intersección con el eje “y”. En este caso se tiene que m=3, al ser positivo esto indica que la función lineal es creciente, por lo que I. es falso.

Se busca conocer el ámbito de la función “f”, para lo cual se debe evaluar la función. La pregunta es, que valores de “x” evaluar en la función, para esto se pueden tener de referencia, a grandes rasgos, tres posibles valores, un valor negativo, uno positivo y el 0 neutro. Entonces, la función tomara el valor negativo y lo convierte en positivo, esto pues el “x” esta elevado al cuadrado, entonces da lo mismo evaluar valores positivos y negativos, por lo tanto, se evalúa x= -1000. Al evaluar este valor se obtiene f(-1000)= -(1000^2)-4= -(1000000)-4= -1000004. Esto indica que el ámbito de la función inicia en -∞, ya que al evaluar cualquier número la función decrece, otra manera de verlo es la siguiente, esta es una función cuadrática de la forma ax^2+bx+c, con a= -1, b=0 y c= -4, como se ha mencionado anteriormente, si se tiene un “a” negativo, la función es cóncava hacia abajo, y saber esto permite conocer que el ámbito inicia en -∞. Ahora bien, para conocer donde termina el ámbito, se debe encontrar el vértice de la gráfica, ya que este es el punto máximo de dicha función, tal y como se ve en la Figura 20, en ese ejercicio se tiene el vértice en (0,-1).

Para encontrar el vértice se puede proceder de la siguiente manera:

Fórmulas para calcular el vértice

Sea $f(x) = ax^2 + bx + c$ una función cuadrática. El vértice V de la función tiene coordenadas (h, k) donde:

$$h = \frac{-b}{2a}$$

$$k = f(h)$$

Si $a > 0$, el vértice es un **mínimo** de la función. Si $a < 0$, el vértice es un **máximo**.

En este caso como se vio anteriormente b=0, por lo tanto, h=-0/2a=0. Y al evaluar f(h=0) se tiene f(0)= -0^2-4=4. Por lo tanto el vértice se localiza en el par ordenado (0,-4), y el ámbito llega hasta este punto, por lo tanto el ámbito de la función es:]-∞,-4]. Por lo tanto, II. también es falso.

Debido a lo anterior se sabe que la respuesta correcta es:

Respuesta correcta:

B. ninguna.

Pregunta 35

Como se vio al inicio de la Pregunta 34, en una función lineal de la forma mx+b, b es el intercepto con el eje “y”, y para esta condición siempre x=0, entonces se sabe que b=2, por lo tanto, la intersección de “g” con el eje “y” se da en el par ordenado (0,2). Por lo tanto, la respuesta correcta es:

Respuesta correcta:

B. (0,2).

Pregunta 36

Se tiene una función que da como resultado la ganancia de producción de chocolates, esta función es g(x)=200x-x^2+800, o visto de otra forma g(x)= -x^2+200x+800, con la forma ax^2+bx+c, donde a= -1, b=200 y c=800, al saber que “a” es negativo podemos concluir que la parábola es cóncava hacia abajo, y en este caso, el vértice es un máximo de la función, entonces para hallar la ganancia máxima simplemente se encuentra el vértice de dicha función con la fórmula mostrada anteriormente

$$h = \frac{-b}{2a} = \frac{-200}{2\cdot -1} = \frac{200}{2} = 100$$

Seguidamente se evalúa a función en "h", para así encontrar el valor de "y" en el vértice y con esto las ganancias máximas.

$$g(h) = -100^2 + 200\cdot 100 + 800 = 10800$$

Entonces se tiene que el vértice se localiza en el par ordenado (100,10 800), y las ganancias máximas en dólares son 10 800. Por esto la respuesta correcta es:

Respuesta correcta:

C. 10 800.

Pregunta 37

Se tiene que se compra lo siguiente:

Lucrecia: 5 cuadernos+3 lapiceros=7 650

María: 9 cuadernos+5 lapiceros=13 550

Y se debe encontrar el precio de los lapiceros. Para iniciar por facilidad se le asigna una letra a cada artículo, entonces los cuadernos quedan representados por una "c" y los lapiceros por una "l", ahora reescribimos las compras de la siguiente manera:

5c+3l=7 650 (1)

y

9c+5l=13 550 (2)

Se tienen dos ecuaciones con dos incógnitas, por lo que es posible encontrar el valor de las incógnitas. Entonces de la ecuación (1) se despeja el valor de los cuadernos "c" tal y como se muestra enseguida:

$$5c + 3l = 7650 --> 5c = 7650 - 3l --> c = \frac{7650 - 3l}{5}$$

Como ya se despejo "c" en términos de "l", ahora lo que sigue es sustituir el valor de "c" en la ecuación (2), tal y como se muestra enseguida:

$$9c + 5l = 13550 --> 9\cdot \left(\frac{7650 - 3\cdot l}{5}\right) + 5l = 13550 -->$$

$$\left(\frac{9\cdot 7650 - 9\cdot 3\cdot l}{5}\right) + 5l = 13550 --> \left(\frac{68850 - 27\cdot l}{5}\right) + 5l = 13550$$

$$--> \left(\frac{68850}{5} - \frac{27\cdot l}{5}\right) + 5l = 13550 --> (13770 - 5.4l) + 5l = 13550 -->$$

$$13770 - 13550 = 5.4l - 5l$$

$$--> 220 = 0.4l --> \frac{220}{0.4} = l --> 550 = l$$

Entonces se encontró que el valor de un lapicero es 550 colones, por lo tanto, la respuesta correcta es:

Respuesta correcta:

A. 550.

No es necesario, pero si se quiere conocer el valor de los cuadernos se usa la ecuación (1) 5c+3l=7 650, y se sustituye el valor de lapicero l=550:

5c+3*(550)=7650-->5c+1650=7650-->5c=7650-1650-->5c=6000-->c=6000/5-->c=1200

El cuaderno vale 1200.

Pregunta 38

Se tiene que la función $g(x)=3800x-2x^2$, que modela las ganancias de una microempresa que vende envases, donde "x" son la cantidad de envases. Entonces se tienen dos escenarios:

I. Si se venden 1900, no hay ganancias.

II. Si se venden 10 envases, la ganancia es ₡37 800.

Entonces se debe evaluar la función con

$x1=1900$ y con $x2=10$.

I. g(1900)=3800*1900-2*(1900^2)=0, como el valor de y1=0, eso significa que no hubo ganancias, por lo que es verdadero.

II. g(10)=3800*10-2*(10^2)=37800, como y2=37 800, es verdad que las ganancias fueron ₡37 800.

Respuesta correcta:

A. ambas.

Pregunta 39

Se tiene que Raúl es un transportista que cobra ₡1 250 por cada kilómetro de viaje, más una tasa fija de ₡30 000 por seguro contra riesgos.

Se quiere saber cuánto es el costo de un viaje de 10 km. Entonces si el costo es ₡1250/km y se tienen 10 km, se multiplica el costo por km por los 10 km, ₡1250/km*10 km=₡12 500, o sea que el costo de 10 km de viaje es 12 500 colones, aún no se sabe el costo total, ya que se deben incluir los ₡30 000 del seguro, por lo que el costo total es 12 500+ 30 000= 42 500 colones. Entonces la respuesta correcta es:

Respuesta correcta:

D. 42 500.

Pregunta 40

Ahora se tiene un problema inverso al de la Pregunta 39, para el mismo costo por km de ₡1 250, se tiene un pago de ₡55 000 y se desea saber la cantidad de kilómetros, para esto lo primero es restar los ₡30 000 de la tasa fija, por lo que quedaría la siguiente cifra 55 000-30 000=25 000 colones. Ahora si se sabe que el costo solo por los km es de ₡25 000, en este caso en lugar de multiplicar se divide el costo total por el costo por kilómetro de la siguiente manera:

₡25 000/(₡1 250/km) se eliminan los colones y los kilómetros se pasan para arriba, entonces se tiene: 25000/1250=20 km, se tiene que el viaje fue cobrado por una distancia de 20 km. Entonces la respuesta correcta es:

Respuesta correcta:

A. 20.

Pregunta 41

I. Si la mediana es mayor que la media, distribución asimétrica positiva. Si se ordenan los datos ascendente o descendentemente, la media es el punto central de la distribución, ya que se encuentra justo a la mitad de los datos, si estos se ordenan de forma ascendente o descendente como se mencionó. La media es el promedio de todos los datos, y se calcula como la suma total de los valores dividiendo esta suma por la cantidad total de valores. Si la mediana, o sea el valor central, es mayor al promedio, esto indica que hay más valores hacia la izquierda de la mediana, por lo que la cola a la izquierda es más larga que la cola a la derecha, lo que significa una asimetría izquierda o negativa. Entonces I. es falso.

II. Si la mediana, la moda y la media son iguales, distribución simétrica. Esto si es verdadero ya que si estos tres valores coinciden las colas a ambos lados son idénticos, lo que significa que hay simetría. Entonces II. es verdadero.

Finalmente, la respuesta correcta es:

Respuesta correcta:

D. solo la II.

Pregunta 42

Se tiene un proceso de admisión para sétimo año donde hay tres rubros para obtener la calificación final:

-Una prueba

-Una entrevista

-Promedio de sexto año

Luego de obtener la calificación final existen tres condiciones en función de la nota obtenida:

-Admitidos, nota mayor a 80.

-En espera, nota entre 75 y 80.

-No admitidos, nota inferior a 75.

Ahora se muestran el valor porcentual de cada rubro y las notas obtenidas por 4 estudiantes:

Rubro	Valor	Ana	Carlos	Juan	Luisa
Prueba	50%	50	70	80	45
Entrevista	20%	95	65	60	100
Notas 6° año	30%	90	95	95	95

Como se ve en el cuadro anterior, la prueba vale la mitad del promedio, 50%, que puede verse como 0,5 del total. Por otra parte, la entrevista tiene un valor porcentual de 20%, lo que es igual a 0,2 del total, y finalmente, el promedio de 6to año vale el restante 30%, que puede verse como 0,3 parte del total. Entonces para encontrar el promedio final, se debe realizar la siguiente operación.

Promedio=(0,5*Prueba)+(0,2*Entrevista)+(0,3*Notas de 6to)

Sabiendo esto, se procede a calcular el promedio final de los cuatro estudiantes como se muestra enseguida:

Promedio Ana=(0,5*50)+(0,2*95)+(0,3*90)=(25)+(19)+(27)=71

Promedio Carlos=(0,5*70)+(0,2*65)+(0,3*95)=(35)+(13)+(28.5)=76.5

Promedio Juan=(0,5*80)+(0,2*60)+(0,3*95)=(40)+(12)+(28.5)=80.5

Promedio Luisa=(0,5*45)+(0,2*100)+(0,3*95)=(22.5)+(20)+(28.5)=71

I. Ana no fue admitida. Debido a que Ana tuvo un promedio de 71, menor a 75, Ana está en “No admitida”, por lo que I. es verdad.

II. La moda es 95. Ya que la moda es el dato que más está presente, como 71 se repite dos veces, la moda es 71 y no 95, por lo tanto, no es verdad.

La respuesta correcta es:

Respuesta correcta:

C. solo la I.

Pregunta 43

I. Carlos está en lista de espera. Ya que Carlos obtuvo un 76,5, mayor que 75, es verdad que él está en lista de espera.

II. Luisa obtuvo un 80. Luisa obtuvo un 71, por lo que II. no es verdad.

La respuesta correcta es C. solo la I.

Pregunta 44

I. Juan fue admitido. Ya que Juan obtuvo un 80,5 mayor que 80, si es verdad que fue admitido.

II. EL promedio de la nota de entrevista es 80. Se tienen las siguientes notas solo de entrevista:

Entrevista Ana=(95)

Entrevista Carlos= (65)

Entrevista Juan= (60)

Entrevista Luisa= (100)

Promedio de los 4:

=(95+65+60+100)/4=320/4=80

Como el promedio sí es 80, II. es verdadero.

La respuesta correcta es:

Respuesta correcta:

A. ambas.

Pregunta 45

Se tiene un grupo de 10 estudiantes que estudian ciertas horas por semana. Las horas están en rangos discretos de 3 horas, tal y como se muestra enseguida:

Horas que invierte un grupo de estudiantes al estudio escolar durante la semana

Horas	Cantidad de estudiantes
De 1 a menos de 3	1
De 3 a menos de 5	2
De 5 a 7	7

Se pide el promedio de horas semanales de estudio. Para iniciar, se debe hacer promedio de los rangos de horas, tomando el valor intermedio del rango, o el valor que está a la mitad, entonces se procede así:

1 a 3 horas, este rango se toma como 2 horas, ya que 2 está a la mitad de 1 a 3. O bien se calcula el promedio como (1+3)/2=2.

3 a 5 horas, este rango se toma como 4 horas, ya que 4 está a la mitad de 3 a 5. O bien se calcula el promedio como (3+5)/2=4.

5 a 7 horas, este rango se toma como 6 horas, ya que 6 está a la mitad de 5 a 7. O bien se calcula el promedio como (5+7)/2=6.

Ahora bien, se tienen 10 estudiantes en total, entonces se tiene que encontrar que porcentaje vale cada estudiante. Para ello se toma 1 estudiante entre el total de 10 Valor de 1 estudiante=1/10=0,1. Entonces para hallar el promedio se proceder de la siguiente manera:

1 estudiante de 1 a 3 horas, promedio de horas es 2 y un estudiante vale 0,1, entonces 2*0,1=0,2 horas.

2 estudiantes de 3 a 5 horas, el promedio de horas es 4, y 2 estudiantes son 0,2, entonces 4*0,2=0,8 horas.

7 estudiantes de 5 a 7 horas, el promedio de horas es 6, y 7 estudiantes valen 0,7, entonces 6*0,7=4,2 horas.

Ya se tienen los promedios de todos los rangos, por lo que únicamente falta sumarlos para obtener el promedio total.

Promedio total=0,2+0,8+4,2=5,2

Entonces la respuesta correcta es:

Respuesta correcta:

D. 5,2.

Pregunta 46

Se tienen 3 dados, y para iniciar se busca la probabilidad de que salga una cara cualquiera, que se encuentra como 1 cara dividida por el total de caras, tal y como se realiza enseguida:

A, seis caras. La probabilidad de que caiga 1 cara es 1/6=0,1667, que es igual a un 16,67% luego de multiplicar la probabilidad por 100%.

B, ocho caras. La probabilidad de que caiga 1 cara es 1/8=0,125, que es igual a un 12,5% luego de multiplicar la probabilidad por 100%.

C, doce caras. La probabilidad de que caiga 1 cara es 1/12=0,0833, que es igual a un 8,33% luego de multiplicar la probabilidad por 100%.

De estas probabilidades encontradas, se tiene la misma para todos los números, por ejemplo, en el dado A, la probabilidad de que salga la cara con el número 1 es 0,1667, y la probabilidad de que salga el 2 es igual a 0,1667 y así sucesivamente hasta llegar a la probabilidad de que salga el 6 que es igual 0,1667. Entonces, si se busca la probabilidad de que salga cualquiera de los números del 1 al 6 se deben sumar todas las probabilidades de la siguiente manera:

Prob1+Prob2+Prob3+Prob4+Prob5+Prob6=0,1667+0,1667+0,1667+0,1667+0,1667+0,1667=

1,0002 que es igual a 100,02%, esto tiene sentid, ya que hay 100% de probabilidades de que salga un número del 1 al 6 en el dado A. El 0,02 se tiene por una cuestión de redondeo.

Se tienen las siguientes proposiciones:

I. Para tener la mayor probabilidad de obtener la cara con el número 4 o 5, se escoge el dado B. En este caso, como se vio en el cálculo de las probabilidades de los dados A, B y C, entre mayor cantidad de caras, la probabilidad de que salga una cara es menor. Entonces se podría decir de antemano que el dado con menor cantidad de caras, por lo que el dado ideal sería el A. Para comprobarlo se puede obtener la probabilidad de que salga el 4 o 5, sumando las probabilidades individuales:

Dado A: Prob. 4=16,67%, Prob. 5=16,67%, Prob. 4 o 5=16,67+16,67=33,34%

Dado B: Prob. 4=12,5%, Prob. 5=12,5%, Prob. 4 o 5=12,5+12,5=25%

Dado C: Prob. 4=8,33%, Prob. 5=8,33%, Prob. 4 o 5=8,33+8,33=16,66%

Entonces el dado con mayor probabilidad de que salga 4 o 5 es el dado A, por lo que I. es incorrecto.

II. La mayor probabilidad de obtener un número mayor que 4 se da con el dado C. Ahora, se debe identificar en primera instancia la cantidad de números mayores que 4 en cada dado:

Dado	Cantidad de números mayores a 4	Números mayores a 4
A	2	5,6
B	4	5,6,7,8
C	8	5,6,7,8,9,10,11,12

En este caso no es tan directo la manera de saber cuál tiene la mayor probabilidad como en la proposición I., para esto se debe multiplicar la probabilidad en cada dado por la cantidad de números mayores que 4, que es lo mismo que sumar la probabilidad de cada número mayor que 4 en cada dado.

Dado	Probabilidad de una cara	Probabilidad de números mayores a 4
A	16,67%	33%
B	12,50%	50%
C	8,33%	67%

En este caso, el dado C es el que brinda mayor posibilidad de que se obtenga un número mayor que 4, esto se debe a que, aunque las probabilidades de cualquier número en el dado C son las menores de los tres dados, existe una mayor cantidad de números mayores que 4 en el dado C que, en los otros dados, por esta razón el C gana. Entonces la proposición II. es correcta.

Por lo tanto, la respuesta correcta es:

Respuesta correcta:

D. solo la II.

Pregunta 47

I. Mayor probabilidad de número par mayor que 3 se tiene con el dado B. Se debe identificar cuantos números mayores que 3 son pares por cada dado:

Dado A: 4 y 6, solo dos números.

Dado B: 4, 6 y 8, solo tres números.

Dado C: 4, 6, 8, 10 y 12 se tienen 5 números.

Ahora se procede como en la Pregunta 46 II. se multiplica la cantidad de números mayores a 3 que sean par, por la probabilidad de cada dado:

Dado	Probabilidad de una cara	Probabilidad de números pares mayores a 3
A	16,67%	33%
B	12,50%	38%
C	8,33%	42%

En este caso se tiene que el dado C es el que gana, por la misma razón de que, aunque la probabilidad es menor, hay más números pares mayores que 3. Entonces I. es falso.

II. Para obtener un número impar mayor que 2, todos los dados dan igual probabilidad.

Se procede a identificar los números impares mayores a dos en cada dado.

Dado	Cantidad de números impar mayor a 2	Números impar mayores a 2
A	2	3,5
B	3	3,5,7
C	5	3,5,7,9,11

Ahora se calcula la probabilidad de cada dado para obtener números impares mayores que 2:

Dado	Probabilidad de una cara	Probabilidad de números impar mayores a 2
A	16,67%	33%
B	12,50%	38%
C	8,33%	42%

Se obtienen las mismas probabilidades que en I. de la presente pregunta, por lo que II es falso.

Entonces la respuesta correcta es:

Respuesta correcta:

B. ninguna.

Pregunta 48

I. Mayor probabilidad de obtener un número mayor o igual que 8. En este caso se descarta el dado A, ya que este llega hasta 6, por ende, la probabilidad de un número igual o mayor que 8 es 0. Se procede a identificar números iguales o mayores que 8 en los dados B y C.

Dado B: solo el número 8. Probabilidad es la de una cara igual a 12,5%.

Dado C: 8, 9, 10, 11, 12, se tienen 5 números. Sería la probabilidad de 5 números o sea 5*8,33=41,5%. El dado C ofrece mayores posibilidades, por eso I. es correcto.

II. Número par, indiferente cualquier dado. Identificar números pares en cada dado:

Dado	Cantidad de números pares	Números pares
A	3	2,4,6
B	4	2,4,6,8
C	6	2,4,6,8,10,12

Ahora se obtiene la probabilidad en cada dado de obtener números pares:

Dado	Probabilidad de una cara	Probabilidad de números pares
A	16,67%	50%
B	12,50%	50%
C	8,33%	50%

En este caso es indiferente, ya que las probabilidades son las mismas, por esto la premisa II. es verdad.

Entonces la respuesta correcta es:

Respuesta correcta:

A. ambas.

Pregunta 49

Se tiene el espacio muestral:

E={3, 5, 6, 7, 9, 10, 12, 13, 15, 18, 20, 21}.

Eventos:

-A: número par.

-B: número primo.

-C: número mayor que 12.

-D: número divisible por 5.

Proposiciones:

I.P(A∩B)=0. Obtener un número par, que a su vez sea primo. Esto es verdad, ya que el único número par que es primo es el número 2, y este no está presente en E.

II. Puntos muestrales de A={6, 10, 12, 18, 20}. Es verdad, pues A es el evento de obtener un número par, y {6, 10, 12, 18, 20} contiene todos los puntos muestrales posibles de ser par.

Entonces la respuesta correcta es:

Respuesta correcta:

A. ambas.

Pregunta 50

I. P(B∩C)=0. Quiere decir la probabilidad de que ocurra el evento B y C al mismo tiempo, ósea, un número primo que sea mayor que 12. Del campo muestral, el número 13 es el único primo mayor que 12, entonces la probabilidad de que esto suceda es la cantidad de números primos mayores que 12 entre el total de números en el campo muestral que son 12 P(B∩C)=1/12, como esto no es 0, entonces I. es falso.

II. P(AUC)=P(A)+P(C). Esto nos dice que la probabilidad de obtener un número par o un número par mayor que doce, es la misma que sumar la probabilidad de un número par más un número mayor que 12. Como se tienen 5 números pares, la probabilidad de obtener un par es P(A)=5/12. Ahora, se tienen 5 números mayores que 12, por lo que la probabilidad de obtener un número al azar mayor que 12 en el campo muestral es P(C)=5/12. En este caso hay números pares mayores que 12, entonces la simple suma de cada probabilidad no es la suma de la unión, entonces la suma de la unión es la suma de lo eventos individuales, menos la probabilidad de la intersección de los eventos, lo que es lo mismo que: P(AUC)=P(A)+P(C)-P(A∩C). Entonces II. es falso.

Respuesta correcta:

B. ninguna.

Pregunta 51

I. P(B∩D). =0. Como 5 es número primo, si existe la posibilidad de obtener un número primo divisible por 5, en este caso sólo el 5. I. es incorrecto.

II. D está compuesto por cuatro puntos muestrales. Se tienen los siguientes números divisibles por 5: 5,10,15,20, como son 4, II es correcto.

Respuesta correcta:

D. solo la II.

Pregunta 52

Estado civil de un grupo de personas según sexo

Sexo/estado civil	Casado	Soltero	Divorciado	Total
Mujer	14	9	11	34
Hombre	7	10	12	29
Total	21	19	23	63

Se busca la probabilidad de obtener una mujer divorciada u hombre casado.

Probabilidad mujer divorciada=11/63.

Probabilidad hombre casado=7/63.

Probabilidad mujer divorciada u hombre casado=11/63+7/63=18/63.

Respuesta correcta es:

Respuesta correcta:

A. 18/63.

Pregunta 53

Se busca la probabilidad de obtener una mujer soltera u hombre soltero.

Probabilidad mujer soltera=9/63.

Probabilidad hombre soltero=10/63.

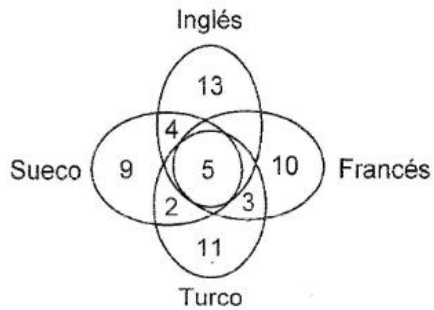
Probabilidad mujer divorciada u hombre casado=9/63+10/63=19/63.

Respuesta correcta es:

Respuesta correcta:

B. 19/63.

Pregunta 54



Primero se identifican la cantidad de personas por idioma:

Sueco=9+4+2+5=20

Turco=11+2+3+5=21

Francés=10+3+5=18

Inglés=13+4+5=22

Ahora se identifican cuantas personas hablan dos idiomas:

Sueco y Turco=2

Turco y Francés=3

Frances e Inglés=0

Inglés y Sueco=4

Luego se identifican la cantidad total de personas:

Total de personas=9+11+10+13+4+2+3+5=57 personas

Y finalmente se identifica las personas que hablan los cuatro idiomas:

Sueco, Turco, Francés e Inglés=5.

Se quiere saber la probabilidad que de las 57 personas una elegida al azar hable sueco o turco, para esto sabemos que 20 hablan sueco y 21 hablan turco, o sea que 20+21=41 personas, se debe tener el cuidado que de estas 41 personas, en realidad 7 son repetidas, pues a cada idioma se sumaron 5 personas que hablan todos los idiomas, y se tienen 2 personas que hablan sueco y turco a la vez, entonces si tomamos el 41, estaríamos repitiendo 7 personas, por lo que a las 41 personas se le restan 7: 41-7=34, entonces ahora sí, se puede decir de manera correcta que 34 personas son las que en realidad hablan sueco o turco, entonces para saber la probabilidad se dividen los 34 entre el total de 57. Probabilidad de que hable sueco o turco=34/57.

Por lo tanto, la respuesta correcta es:

Respuesta correcta:

D. 34/57.

Pregunta 55

Ahora se quiere la probabilidad de elegir al azar una persona que hable dos o más de esos idiomas, para esto se busca la cantidad de personas que hablen dos o más idiomas. Anteriormente se encontró la cantidad de personas que hablan 2 idiomas:

Sueco y Turco=2

Turco y Francés=3

Frances e Inglés=0

Inglés y Sueco=4

De acá llevamos 9 personas que hablan dos idiomas, a estas se le suman las cinco personas que hablan los cuatro idiomas, se tiene 9+5=14 personas, estas son las personas que hablan dos o más idiomas. Ahora se divide entre el total para encontrar la probabilidad, entonces se tiene:

Probabilidad de que una persona al azar hable 2 o más idiomas=14/57.

Entonces la respuesta correcta es:

Respuesta correcta:

D. 14/57.